物理学基礎論Ｂレポート01

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

2013 年 10 月 15 日

1　ベクトルの基礎

ベクトル $\mathbf{A} = \langle 1,2,3 \rangle$ と $\mathbf{B} = \langle 1,3,2 \rangle$ について以下を求めよ。

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}$

$$\textit{latex} \text{ コマンド } \mathbf{A}+\mathbf{B} = \langle 2,5,5 \rangle$$

2. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= 1\times 1 + 2\times 3 + 3\times 2 \\ &= 11 \end{aligned}$$

3. $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\times\mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \left\langle \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right\rangle \\ &= \langle -5,1,1 \rangle \end{aligned}$$

4. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} &= 1\times 1 + 2\times 2 + 3\times 3 \\ &= 14 \end{aligned}$$

5. $\mathbf{A}\times\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = \langle 0,0,0 \rangle$$

同じベクトルのクロス積 (cross product) は 0！

6. $\mathbf{A}$ を正規化 (normalized) し、単位ベクトル (長さが 1) を求めよ。$|\mathbf{A}| = \sqrt{A\cdot A}$ なので、先の計算結果を利用し、単位ベクトル $\mathbf{e}_A$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_A &= \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\rangle \end{aligned}$$

2　二重積分の基礎

二重積分

$$\int\int_S f(\mathbf{r})dS$$

について以下を求めよ。ただしベクトル空間 $\{\langle x,y\rangle\}$ は直交座標系を、ベクトル空間 $\{\langle r,\theta\rangle\}$ は極座標系を取るものとする。

1. $r=\langle x,y\rangle$、$f(\mathbf{r})=xy$ とし、S が $\{x=[0\,1],y=[0\,1]\}$ の正方形

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 xy\,dxdy &= \int_0^1 x\,dx\int_0^1 y\,dy\\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

2. $r=\langle x,y\rangle$、$f(\mathbf{r})=x$ とし、S が第一象限にある半径 1 の原点を中心とする四分円。（授業での例題）

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dxdy &= \int_0^1\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy\\ &= \int_0^1\frac{1-y^2}{2}\,dy\\ &= \frac{1}{2}\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

3. $r=\langle r,\theta\rangle$、$f(\mathbf{r})=x=r\cos(\theta)$ とし、S が第一象限にある半径 1 の原点を中心とする四分円。

$$\begin{aligned}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^1 r\cos(\theta)\,rdrd\theta &= \int_0^{\pi/2}\cos(\theta)d\theta\int_0^1 r^2\,dr\\ &= [\sin(\theta)]_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

極座標系では $dS=rdrd\theta$ となることに注意。

3　複数の電荷

3 つの同じ電荷 q を持つ点電荷が、一辺が l の正三角形の各頂点にある。この時、

1. あるひとつの点電荷が他のふたつの点電荷より受ける静電気力の大きさを求めよ。

   右図 1 の様に各点電荷を置く事とし、点電荷 A が受ける静電気力の大きさを求める。
   X 方向に関しては、

$$\begin{aligned} F_{Ex} &= \frac{qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos(\pi/6)}{l^2}+\frac{\cos(-\pi/6)}{l^2}\right) \\ &= \frac{qq}{\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 l^2} \end{aligned}$$

   Y 方向に関しては

$$\begin{aligned} F_{Ey} &= \frac{qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sin(\pi/6)}{l^2}+\frac{\sin(-\pi/6)}{l^2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   よって、静電気力の大きさ F_E は

$$\begin{aligned} F_E &= \sqrt{F_{Ex}^2+F_{Ey}^2} \\ &= \frac{qq}{\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 l^2} \end{aligned}$$

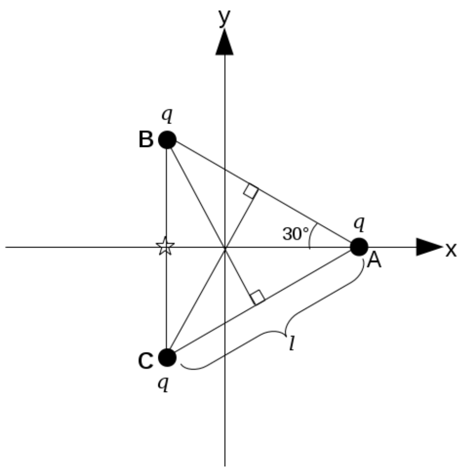

図 1: 問 3 の模式図。正三角形の中心を原点に置いた。

3. ある一辺の中点での電場を求めよ。

   図 1 の星印での電場を求める。
   X 方向に関して、点電荷 A との距離は $l\sqrt{3}/2$ なので、向きも考慮して、

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{l\sqrt{3}/2}$$

   Y 方向に関して、点電荷 B、C との距離は $l/2$ であるが、同価の電荷が正反対の位置にあるので、

$$E_y = 0$$

   よって、ある一辺の中間点の電場はその正三角形の中心から外向きに

$$E = \frac{q}{2\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 l}$$

   である。

4. 正三角形の中心での電場を求めよ。

正三角形の中心から各頂点の距離は $l/\sqrt{3}$ である。また図 1 において、頂点 B、C の角座標はそれぞれ 120 度と-120 度である。是らより、中心点での電場 $\mathbf{E}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \sum_{i=A,B,C} \left\langle -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos(\theta_i)}{l/\sqrt{3}}, -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sin(\theta_i)}{l/\sqrt{3}} \right\rangle \\
&= -\frac{\sqrt{3}q}{4\pi\varepsilon_0 l} \sum_{i=A,B,C} \langle\cos(\theta_i), \sin(\theta_i)\rangle \\
&= -\frac{\sqrt{3}q}{4\pi\varepsilon_0 l} \left\langle \cos(0) + \cos(\frac{2\pi}{3}) + \cos(-\frac{2\pi}{3}), \sin(0) + \sin(\frac{2\pi}{3}) + \sin(-\frac{2\pi}{3}) \right\rangle \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

となる。よって、中心点では電場がゼロである。

5. 正三角形の面に垂直で中心を通る直線に沿って、点電荷 Q を無限遠から中心まで近づけた時、電場が行った仕事を求めよ。

正三角形の中心の直上 h(+Z 方向) の高さでの電場の Z 成分 E_z は、各頂点からの距離ベクトルを $\mathbf{r}_i(h), (i = A, B, C)$ とすると。

$$
\begin{aligned}
E_z(h) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=A,B,C} \frac{h}{|\mathbf{r}_i(h)|^3} \\
&= \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{h}{(h^2 + (l/\sqrt{3})^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

よって、無限遠から $h = 0$ まで電荷 Q を近づけた時の電場が行った仕事 W は

$$
\begin{aligned}
W &= \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \\
&= \frac{3qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_{h=\infty}^{0} \frac{h}{(h^2 + (l/\sqrt{3})^2)^{3/2}}\, dh \\
&= \frac{3qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{h^2 + (l/\sqrt{3})^2}} \right]_\infty^0 \\
&= -\frac{3\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_0 l}
\end{aligned}
$$

4　一様な電荷-ワイヤー

無限に長いワイヤーが単位長さ辺り λ で一様に帯電している。この時、ワイヤーから距離 a の電場を求めよ。ただし、ワイヤーの太さは無視出来るものとする。
ワイヤーを y 軸とする直交座標系を取り、求めたい電場を x 軸上 $x = a$ のものとする。x 軸に対し対称であるので、電場の y 成分はゼロである。また、ワイヤー上のある点と求めたい電場の点との距離は $\mathcal{R} = \sqrt{a^2 + y^2}$ なので、求めたい電場は x 成分のみでその大きさは、

$$
\begin{aligned}
E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(\sqrt{a^2 + y^2})^2}\, dy \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} 2 \int_0^\infty \frac{1}{a^2 + y^2}\, dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}\mathrm{atan}(\frac{y}{a})\right]_0^\infty \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\pi}{2a} = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0 a}
\end{aligned}
$$

5　一様な電荷-金属球殻

半径 R の金属球殻があり、単位面積辺り σ で一様に帯電している。この時、球殻の中心から距離 a の電場を、$a < R$ と $a > R$ の場合に分て求めよ。ただし、球殻の厚さは無視出来るものとする。

球座標系を用い、球殻の中心点を原点に置き、求める電場を z 軸上 $(z = a)$ の点 A のものとする。
球殻上のある一点から点 A への位置ベクトル $\mathbf{b}$ の大きさは $b = \sqrt{(a - R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2}$ であるので、球殻上のある点による点 A での電場 $\Delta\mathbf{E}$ は

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathbf{E} &= \frac{\sigma\Delta S}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\,\mathbf{e}_z - \mathbf{b}}{b^3} \\
&= \frac{\sigma\Delta S}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-R\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x - R\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y + (a - R\cos\theta)\,\mathbf{e}_z)}{((a - R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

ここで ΔS はある点の面積である。この式を球面について積分すると各成分は以下の様になる。

$$
\begin{aligned}
E_x &= -\frac{R\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\sin\theta\cos\phi}{((a - R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2)^{3/2}}\,[r^2]_{r=R}\sin\theta d\theta d\phi \\
&= -\frac{R^3\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\cos\phi\,d\phi\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

これは ϕ についての積分がゼロとなり、かつ $a \neq R$ において θ についての積分が特異点 (singularity) を含まないからである。同様に $E_y = 0$ となる。最後に E_z であるが、

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{a - R\cos\theta}{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{3/2}}\,[r^2]_{r=R}\sin\theta d\theta d\phi \\
&\quad \left|\ \begin{array}{l} \text{ここで } h = -2aR\cos\theta \text{ とすると、} dh = 2aR\sin\theta d\theta \\ \quad \theta \to \pi:\ h \to 2aR, \qquad \theta \to 0:\ h \to -2aR \end{array}\right. \\
&= \frac{R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}d\phi\int_{h=-2aR}^{2aR}\frac{a - h/(-2a)}{(a^2 + R^2 + h)^{3/2}}\frac{dh}{2aR} \\
&= \frac{R\sigma}{16a^2\pi\varepsilon_0}[\phi]_0^{2\pi}\int_{h=-2aR}^{2aR}\frac{2a^2 + h}{(a^2 + R^2 + h)^{3/2}}\,dh \\
&= \frac{R\sigma}{8a^2\varepsilon_0}\left[\frac{2(2R^2 - h)}{\sqrt{a^2 + R^2 + h}}\right]_{h=-2aR}^{2ar} \\
&= \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0 a^2}\left\{\frac{R + a}{|R + a|} - \frac{R - a}{|R - a|}\right\} \\
&\quad \left|\ R > 0, a > 0, R \neq a \text{ なので、符号関数 } \mathrm{sgn}(x) = x/|x| \text{ を用いて}\right. \\
&= \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 a^2}\frac{1 - \mathrm{sgn}(R - a)}{2}
\end{aligned}
$$

よって $a < R$ の場合

$$
\mathbf{E} = \mathbf{0}
$$

$a > R$ の場合、点 A を任意の点に置き換えると、z 成分は r 成分に置き換えられるので

$$
\mathbf{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 a^2}\mathbf{e}_r
$$

6　TA の悪ノリ問題

6.1　帯電した星間ガス-初期宇宙

半径 a の球形の電子ガス A と半径 b の球形の陽電子ガス B が中心を共有し、共に一様で非常に高い数密度 n で存在している。双方のガスが発散しない条件 a/b の値の範囲を静電気力と重力を考慮して求めよ。ただし密度の時間的発展、衝突や対消滅、熱運動による圧力、磁場等は考えなくて良いものとする。

中心から最も遠いガスの一粒子が拡散方向に力を受けていなければ、これらのガスは発散しないと見なせる。また n が非常に大きいので、一粒子加えた時の系全体への影響は無視できるものと見なせる。よって最も遠い位置に一粒子加え、その粒子が系全体から反発力を受けなければ、この系は発散しないと見なせる。

帯電したガスは帯電した球殻の集まりと見なせる。よって、先の問 5 より一様の電荷を持った半径 r の球殻から距離 $x > r$ にて受ける電場は

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma r^2}{\varepsilon_0 x^2}\mathbf{e}_r \tag{1}$$

である。また単位面積あたりの電荷 σ が正とすると、数密度 n と電気素量 e を用いて以下の様に表すことが出来る。

$$\sigma = en\Delta r \tag{2}$$

ここで Δr は球殻の厚さに相当する。式 1 と式 2 より距離 $x > R$ における半径 R の帯電した球形のガスによる電場は

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{e}_r \frac{en}{\varepsilon_0 x^2}\int_{r=0}^{R} r^2\,dr && (3)\\ &= \mathbf{e}_r \frac{en}{\varepsilon_0 x^2}\frac{R^3}{3} && (4) \end{aligned}$$

同様に重力場 $\mathbf{G}$(重力 $\mathbf{F} = m\mathbf{G}$) も、ガスの一粒子の重さを m とすると以下の様に表す事が出来る。

$$\mathbf{G} = -\mathbf{e}_r \frac{4\pi Gmn}{x^2}\frac{R^3}{3} \tag{5}$$

よって電荷 Q 質量 M の粒子がこの電子と陽電子のガスの集りから距離 x にて受ける力 $\mathbf{F}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\mathbf{e}_r\left\{\frac{4\pi GMm_e n}{x^2}\frac{a^3}{3} + \frac{4\pi GMm_e n}{x^2}\frac{b^3}{3} + \frac{Qen}{\varepsilon_0 x^2}\frac{a^3}{3} - \frac{Qen}{\varepsilon_0 x^2}\frac{b^3}{3}\right\} && (6)\\ &= -\mathbf{e}_r\frac{4\pi n}{3x^2}\left\{\left(GMm_e + \frac{Qe}{4\pi\varepsilon_0}\right)a^3 + \left(GMm_e - \frac{Qe}{4\pi\varepsilon_0}\right)b^3\right\} && (7) \end{aligned}$$

$a > b$ の場合、加える粒子は電子である。よって $Q = -e$、$M = m_e$、$x = a$。
式 6 が引力であるためには

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(Gm_e^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)a^3 + \left(Gm_e^2 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)b^3 && (8)\\ \frac{a}{b} &\leq \left(\frac{e^2/(4\pi\varepsilon_0) + Gm_e^2}{e^2/(4\pi\varepsilon_0) - Gm_e^2}\right)^{1/3} && (9) \end{aligned}$$

なお、重力よりも静電気力の方が強いので $e^2/(4\pi\varepsilon_0) > Gm_e^2$ である。

同様に $a < b$ の場合、加える粒子は陽電子である。よって $Q = e$、$M = m_e$、$x = a$。
式 6 が引力であるためには

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(Gm_e^2 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)a^3 + \left(Gm_e^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)b^3 && (10)\\ \frac{a}{b} &\geq \left(\frac{e^2/(4\pi\varepsilon_0) - Gm_e^2}{e^2/(4\pi\varepsilon_0) + Gm_e^2}\right)^{1/3} && (11) \end{aligned}$$

また $a=b$ の時、式 6 が引力であることは自明であるので、電子と陽電子のガスの集まりが発散しない条件は、式 8 と 10 より、

$$\left(\frac{e^2/(4\pi\varepsilon_0)-Gm_e^2}{e^2/(4\pi\varepsilon_0)+Gm_e^2}\right)^{1/3} \leq \frac{a}{b} \leq \left(\frac{e^2/(4\pi\varepsilon_0)+Gm_e^2}{e^2/(4\pi\varepsilon_0)-Gm_e^2}\right)^{1/3} \tag{12}$$

6.2 帯電した星間ガス-現在の宇宙

先の問いにおいてガス B が陽電子ではなく陽子で構成されていた場合の双方のガスが発散しない条件 a/b の値の範囲を、先の問いと同様に求めよ。

先の問いと同様に最遠の地点に一つ粒子を加える。その粒子にかかる力は式 6 を参考に、

$$\mathbf{F} = -\mathbf{e}_r\frac{4\pi n}{3x^2}\left\{\left(GMm_e+\frac{Qe}{4\pi\varepsilon_0}\right)a^3+\left(GMm_p-\frac{Qe}{4\pi\varepsilon_0}\right)b^3\right\} \tag{13}$$

重力よりも静電気力の方が強いので $e^2/(4\pi\varepsilon_0) > Gm_p^2 > Gm_em_p > Gm_e^2$ であることに注意して同様に解くと、a/b の条件は以下の様になる。

$$\left(\frac{e^2/(4\pi\varepsilon_0)-Gm_p^2}{e^2/(4\pi\varepsilon_0)+Gm_em_p}\right)^{1/3} \leq \frac{a}{b} \leq \left(\frac{e^2/(4\pi\varepsilon_0)+Gm_em_p}{e^2/(4\pi\varepsilon_0)-Gm_e^2}\right)^{1/3} \tag{14}$$

オーダー計算をすればわかるが、$e^2/(4\pi\varepsilon_0) \gg Gm_p^2$ なので条件はほぼ $a=b$ である。