物理学基礎論 B レポート 2

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成 25 年 10 月 21 日

1　数学

1.1　発散定理

発散定理 (Divergence Theorem) またはガウスの法則 (Gauss' Theorem) とは任意の滑らかなベクトル場 $\mathbf{A}$ の発散についての体積積分を行うとき、以下の式が成り立つ事を指す。

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV \quad = \quad \int_S \mathbf{A} \cdot d\hat{\mathbf{S}}$$

ここで V は与えられた体積であり、S は V の表面である。この S をガウス面 (Gaussian Surface) と呼ぶ。右辺はベクトル場と表面の単位ベクトルとの内積となっていることに注意。
発散定理を考慮に入れた上で、以下の値を求めよ。

1. ベクトル場 $\mathbf{A} = r^2\hat{\mathbf{r}}$ の、半径 1 で原点を中心とする球における体積積分
2. ベクトル場 $\mathbf{A} = y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}$ の、半径 1 で原点を中心とする球における体積積分
3. ベクトル場 $\mathbf{A} = r^2\hat{\mathbf{r}}$ の、一辺 2 で原点を中心とする立方体における体積積分
4. ベクトル場 $\mathbf{A} = xy\hat{\mathbf{x}} + xy\hat{\mathbf{y}}$ の、一辺 2 で原点を中心とする立方体における体積積分
5. ベクトル場 $\mathbf{A} = 1/r^2\hat{\mathbf{r}}$ の、半径 1 で原点を中心とする球における体積積分

1.2　ディラックのデルタ関数

ディラックのデルタ関数 (Dirac's delta function 又は単に delta function) とは

$$\delta(x) \quad = \quad \begin{cases} \infty & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$

であり、ある任意の関数 $f(x)$ について

$$\lim_{\Delta \to 0} \int_{a-\Delta}^{a+\Delta} f(x)\, \delta(x-b)\, dx \quad = \quad \begin{cases} f(a) & \text{if } a = b \\ 0 & \text{if } a \neq b \end{cases}$$

を満す。また高次元のデルタ関数について以下の式が成り立つ。

$$\delta^3(x, y, z) \quad = \quad \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

以上を元に、以下の値を求めよ。

1. 半径 2 で原点を中心とする球に関して、$\int_V xy\, \delta^3(x-1, y+1, z)\, dV$
2. 半径 2 で原点を中心とする球に関して、$\int_V xyz\, \delta^3(x-1, y+1, z)\, dV$
3. 半径 R で原点を中心とする球に関して、$\int_V \delta(r-a)\, dV$ ただし $a < R$

2 点電荷

位置ベクトル $\mathbf{r}$ にある電荷 Q を持つ点電荷は電荷密度 $\rho = Q\delta(\mathbf{r})$ によって表される。$\mathbf{r} = \mathbf{0}$ として、ガウスの法則を用いてクーロンの法則を導出せよ。

3 一様な電荷を持つワイヤー

単位長さ辺り λ の一様な電荷を持つ無限に長いワイヤーから距離 a の位置の電場をガウスの法則を使って求めよ。

4 一様な電荷を持つ球

一定の電荷密度 ρ を持つ半径 R の球体の中心から距離 a の位置の電場をガウスの法則を使って求めよ。

5 電場から電荷密度

以下の電場が既知であるとき、任意の位置の電化密度を求めよ。

1. $\mathbf{E} = r^3\,\hat{\mathbf{r}}$
2. $\mathbf{E} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + y^2\,\hat{\mathbf{y}}$

6 電場から電荷

以下の電場が既知であるとき、次の空間内における電荷の総量を 2 通りの方法で求めよ。

1. $\mathbf{E} = r^3\,\hat{\mathbf{r}}$、半径 1 の原点を中心とする球内において。
2. $\mathbf{E} = xy^2z^2(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$、一辺 2 の原点を中心とする立方体において。