物理学基礎論 B レポート 03-解答

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成 25 年 12 月 3 日

1　数学演習

以下の体積積分 $\int_V F dV$ を求めよ。ただし $< x, y, z >$ は直交座標系を、$< r, \theta, \phi >$ は球座標系を意図するものとする。

1. $F = z$、原点を中心とする半径 2 の球について
   球座標を用いると $z = r\cos\theta$ なので

$$\begin{aligned}
\int_V z dV &= \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r\cos\theta\, r^2 \sin\theta\, d\phi d\theta dr \\
&= \int_{r=0}^{2} r^4\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \cos\theta\sin\theta\, d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi
\end{aligned}$$

> ここで、$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ なので、$u = 2\theta$ とすると
> $\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \;=\; \frac{1}{4}\int_{u=0}^{2\pi} \sin u\, du \;=\; 0$
> よって

$$= 0$$

2. $F = r^2$、原点を中心とする一辺の長さ 2 の立方体について

$$\begin{aligned}
\int_V r^2\, dV &= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz dy dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{8}{27}
\end{aligned}$$

3. $F = r/(2 - r^2)^{3/2}$、原点を中心とする半径 1 の球について

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{r}{(2-r^2)^{3/2}} dV &= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{r}{(2-r^2)^{3/2}}\, r^2 \sin\theta\, d\phi d\theta dr \\
&= 4\pi \int_{r=0}^{1} \frac{r^3}{(2-r^2)^{3/2}} dr
\end{aligned}$$

> $u = 2 - r^2$ と置くと、$du = -2rdr$、$r \in [0,\, 1] \;\Rightarrow\; u \in [2,\, 1]$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{u=1}^{2} \frac{2-u}{u^{3/2}} du \\
&= 2\pi \int_{u=1}^{2} \left(2u^{-3/2} - u^{-1/2}\right) du \\
&= 2\pi \left[-4u^{-1/2} - 2u^{1/2}\right]_{u=1}^{2} \\
&= 4\pi(3 - 2\sqrt{2})
\end{aligned}$$

4. $F=z$、$< x,y,z > = < 1,1,1 >$ を中心とする半径 2 の球について
   $< x,y,z > = < 1,1,1 >$ を原点とする直交座標系 $< x',y',z' >$ を考えると

$$< x',y',z' > \;=\; < x-1, y-1, z-1 >$$

   という座標変換が成り立つ。同様に $< x,y,z > = < 1,1,1 >$ を原点とする球座標系 $< r',\theta',\phi' >$ を考えると

$$F \;=\; z \;=\; 1+z' \;=\; 1+r'\cos\theta'$$

   となるので、求める体積積分は

$$\begin{aligned}\int_V zdV &= \int_{r'=0}^{2}\int_{\theta'=0}^{\pi}\int_{\phi'=0}^{2\pi}(1+r'\cos\theta')r'\sin\theta'\,d\phi' d\theta' dr' \\ &\quad |\ \text{先の小問 1. より後半部の } z' \text{ の積分はゼロであり、前半部は体積を求める積分であるので} \\ &= \frac{4}{3}\pi[r'^3]_{r=2} \;=\; \frac{32}{3}\pi\end{aligned}$$

2　クーロンの法則とガウスの法則

電荷 Q をもつふたつの点電荷が z 軸上に $\pm d$ の位置に存在している。この時、

1. 任意の地点における電場をクーロンの法則を用いて求めよ。
   ふたつの点電荷と任意の点 $< x,y,z >$ との距離はそれぞれ $\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}$ と $\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}$ なので、任意の点における電場 E は、クーロンの法則より、

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= < Ex, Ey, Ez > \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{3/2}} < x,y,z-d > + \frac{Q}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{3/2}} < x,y,z+d >\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left((r^2+d^2-2dr\cos\theta)^{-3/2} < x,y,z-d > + (r^2+d^2+2dr\cos\theta)^{-3/2} < x,y,z+d >\right)\end{aligned}$$

   ただし $R^2=x^2+y^2+z^2$、θ は任意の点を球座標系にて著した時のもので $z=r\cos\theta$。

2. 1. の答えを、原点を中心とする半径 $R > d$ の球の閉曲面について積分し、

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\hat{\mathbf{S}} = \frac{2Q}{\varepsilon_0}$$

となる事を示せ。

1. より

$$\begin{aligned}
\oint_S \mathbf{E}\cdot d\hat{\mathbf{S}} &= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\Big((r^2+d^2-2dr\cos\theta)^{-3/2} < x, y, z-d > \\
&\quad +(r^2+d^2+2dr\cos\theta)^{-3/2} < x, y, z+d >\Big)\cdot\hat{\mathbf{n}}\, r^2\sin\theta\Big]_{r=R} d\phi d\theta
\end{aligned}$$

ここで、原点を中心とする球の表面に置いては $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$ なので、
$\hat{\mathbf{n}} =< x, y, z > /r$
よって
$< x, y, z-d > \cdot\hat{\mathbf{n}} = (x^2+y^2+z^2-zd)/r = r - d\cos\theta$
$< x, y, z+d > \cdot\hat{\mathbf{n}} = (x^2+y^2+z^2+zd)/r = r + d\cos\theta$

$$= \frac{QR^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left(\frac{R-d\cos\theta}{(R^2+d^2-2dR\cos\theta)^{3/2}}+\frac{R+d\cos\theta}{(R^2+d^2+2dR\cos\theta)^{3/2}}\right)\sin\theta\, d\phi d\theta$$

| ϕ については簡単に積分できるので

$$= \frac{QR^2}{2\varepsilon_0}\left\{\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{(R-d\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{(R^2+d^2-2dR\cos\theta)^{3/2}}+\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{(R+d\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{(R^2+d^2+2dR\cos\theta)^{3/2}}\right\}$$

ここで $u = R-2d\cos\theta$、$v = R+2d\cos\theta$ とおくと、
それぞれ $du = 2d\sin\theta$、$dv = -2d\sin\theta$、
$\theta\in[0,\,\pi] \ \Rightarrow\ u\in[R-2d,\, R+2d]$
$\theta\in[0,\,\pi] \ \Rightarrow\ v\in[R+2d,\, R-2d]$
なので

$$\begin{aligned}
&= \frac{QR^2}{4d\varepsilon_0}\left\{\int_{u=R-2d}^{R+2d}\frac{(R+u)/2}{(d^2+Ru)^{3/2}}du-\int_{v=R+2d}^{R-2d}\frac{(R+v)/2}{(d^2+Rv)^{3/2}}dv\right\}\\
&= \frac{QR^2}{4d\varepsilon_0}\left\{\int_{u=R-2d}^{R+2d}\frac{(R+u)/2}{(d^2+Ru)^{3/2}}du+\int_{v=R-2d}^{R+2d}\frac{(R+v)/2}{(d^2+Rv)^{3/2}}dv\right\}
\end{aligned}$$

| u の積分と v の積分は同型なので $v\to u$ として

$$= \frac{QR^2}{4d\varepsilon_0}\int_{u=R-2d}^{R+2d}\frac{R+u}{(d^2+Ru)^{3/2}}du$$

$w = d^2+Ru$ とおくと、$dw = Rdu$
$u\in[R-2d,\, R+2d] \ \Rightarrow\ w\in[(R-d)^2,\, (R+d)^2]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{QR^2}{4d\varepsilon_0}\int_{w=(R-d)^2}^{(R+d)^2}\left(R+\frac{w-d^2}{R}\right)w^{-3/2}\frac{dw}{R}\\
&= \frac{QR^2}{4d\varepsilon_0}\left\{\left(1-\frac{d^2}{R^2}\right)\int_{w=(R-d)^2}^{(R+d)^2}w^{-3/2}dw+\frac{1}{R^2}\int_{w=(R-d)^2}^{(R+d)^2}w^{-1/2}dw\right\}\\
&= \frac{QR^2}{4d\varepsilon_0}\left[\left(1-\frac{d^2}{R^2}\right)\left(-2w^{-1/2}\right)+\frac{1}{R^2}2w^{1/2}\right]_{w=(R-d)^2}^{(R+d)^2}\\
&= \frac{QR^2}{4d\varepsilon_0}\left[\frac{2(w+d^2-R^2)}{R^2\sqrt{w}}\right]_{w=(R-d)^2}^{(R+d)^2}\\
&= \frac{Q}{2d\varepsilon_0}\left\{\frac{(R+d)^2+d^2-R^2}{R+d}-\frac{(R-d)^2+d^2-R^2}{R-d}\right\}\\
&= \frac{Q}{2d\varepsilon_0}\left\{\frac{2d^2+2Rd}{R+d}-\frac{2d^2-2Rd}{R-d}\right\} = \frac{2Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Q.E.D.)}
\end{aligned}$$

3. 2. より

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\hat{\mathbf{S}} = 4\pi R^2 E = \frac{2Q}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

に一見思えるが、これは 1. の答えとは異る。それは何故か考察せよ。

(考察)　1. で求めた E は原点を中心とする球の表面において一定では無い。それは 1. で求めた電場の大きさが θ の関数であることから解る。一方 $\oint_S \mathbf{E}\cdot d\hat{\mathbf{S}} = E\,4\pi R^2$ においては E が球の表面において一定である事を仮定している。この仮定が成り立っていない為に、ガウスの法則を短絡的に使用し電場を導き出すことは出来無い。

捕捉: ガウスの法則では実際の値ではなく閉曲面全体における電場の平均値 E_{ave} しか出せない。正しくは $\oint_S \mathbf{E}\cdot d\hat{\mathbf{S}} = E_{ave}S$ なのである。対称性を持つ、閉曲面上において一定の電場を考える場合でのみ平均値と真の値が等しくなるだけなのである。なお、この問題において、$R \gg d$ の極限をとれば 2 つの点電荷を 1 つの点電荷に近似でき、ガウスの法則で十分に正しい値を導き出せる。

3　電場から電荷

原点を中心とする半径 a の球の表面における電場 E を測ったところ、

$$\mathbf{E} = E_0 \sin\theta\cos^2\phi\,\hat{\mathbf{r}}$$

であった。球の内部の電荷の総量を求めよ。
ガウスの法則より

$$\begin{aligned}
Q &= \varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} \\
&= \varepsilon_0 E_0 \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \sin\theta\cos^2\phi\,[r^2]_{r=a}\sin\theta\,d\phi d\theta \\
&= \varepsilon_0 E_0 a^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi} \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi^2\varepsilon_0 E_0 a^2}{2}
\end{aligned}$$

4 二層構造

正の電荷密度 ρ_A を持つ半径 α の球 A を負の電荷密度 $-\rho_B$ を持つ厚さ β の層 B で覆う。外部での電場がゼロである時、β の値を α、ρ_A、ρ_B を用いて記述せよ。
外部での電場がゼロである時、ガウスの法則より球全体での総電荷がゼロである事がわかる。よって、ρ_A の領域を V_A、ρ_B の領域を V_B とすると、

$$\begin{aligned} Q = 0 &= \int_{V_A} \rho_A dV + \int_{V_B} (-\rho_B) dV \\ &= \int_{r=0}^{\alpha} \rho_A \, r^2 \sin\theta \, d\phi d\theta dr - \int_{r=\alpha}^{\beta+\alpha} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_B \, r^2 \sin\theta \, d\phi d\theta dr \\ &= 4\pi \left\{ \rho_A \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\alpha} - \rho_B \left[\frac{r^3}{3} \right]_{\alpha}^{\beta+\alpha} \right\} \end{aligned}$$

β について解くと、

$$\begin{aligned} \frac{\rho_B}{3}(\beta+\alpha)^3 &= \frac{\rho_A+\rho_B}{3}\alpha^3 \\ \beta &= \alpha\left(\left(\frac{\rho_A+\rho_B}{\rho_B} \right)^{1/3} - 1 \right) \end{aligned}$$

5 柴田先生からの数学問題

n 次元球の体積を求めよ。

まず始めに、この解答には複雑な漸化式や特殊関数が大量に出てきます。個人的には学部生のレベルを軽く超ているのではと思いますが、この解答以外には思いつかなかったので、複雑なまま掲載します。もし、より簡単な導出法があれば教えてください。あと個人的理由（和訳が面倒）により英語で書きます。すみません（TA）

n-dimensional spherical volume

we know for cases $n = 1, 2, 3$, n-dimensional spherical volumes of radius R are $2R$, πR^2, $\frac{4}{3}\pi R^3$, respectively.

Now, we assume for some n-dimensional spherical volume V_n,

$$V_n \equiv V_n(R) = \alpha_n R^n \tag{1}$$

where α_n is some constant.

Then, n+1-dimensional spherical volume V_{n+1} would be given as,

$$V_{n+1} = \int_{x=-R}^{R} V_n(\sqrt{R^2-x^2}) dx \tag{2}$$

$$= \int_{x=-R}^{R} \alpha_n (R^2-x^2)^{n/2} dx \tag{3}$$

By letting $x = R\cos\theta$ with integration domain from $\theta = \pi$ to $\theta = 0$,

$$V_{n+1} = \int_{\theta=\pi}^{0} \alpha_n (R^2 - R^2\cos^2\theta)^{n/2}(-\sin\theta) d\theta \tag{4}$$

$$= \alpha_n R^{n+1} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^{n+1}\theta d\theta \tag{5}$$

Since the integral part is the function of θ, we could make our step one more forward to find the volume of $n+2$ in the similar way to the previous step.

$$\begin{aligned}
V_{n+2} &= \alpha_n \int_{\theta'=\pi}^{0} (R^2 - R^2\cos^2\theta')^{n+1}(-R\sin\theta')d\theta' \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^{n+1}\theta d\theta && (6)\\
&= \alpha_n R^{n+2} \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin^{n+2}\theta d\theta' \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^{n+1}\theta d\theta && (7)
\end{aligned}$$

Here we introduce Wallis cosine formula[1] such that

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^m\theta d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^m\theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((m+1)/2)}{m\,\Gamma(m/2)} \tag{8}$$

where $\Gamma(x)$ is a gamma function[2] with a property $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

Now we back to Eq.7 and apply Wallis cosine formula. Note that $\int_{\theta=0}^{\pi}\sin^m\theta d\theta = 2\int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin^m\theta d\theta$

$$\begin{aligned}
V_{n+2} &= \alpha_n R^{n+2} \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin^{n+2}\theta d\theta' \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^{n+1}\theta d\theta && (9)\\
&= 4\alpha_n R^{n+2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^{n+2}\theta d\theta \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^{n+1}\theta d\theta && (10)\\
&= 4\alpha_n R^{n+2} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n+3)/2)}{(n+2)\,\Gamma((n+2)/2)} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n+2)/2)}{(n+1)\,\Gamma((n+1)/2)} && (11)\\
&= 4\pi\alpha_n R^{n+2} \frac{((n+3)/2-1)\Gamma((n+3)/2-1)}{(n+2)(n+1)\Gamma((n+1)/2)} && (12)\\
&= \frac{2\pi}{n+2}\alpha_n R^{n+2} && (13)
\end{aligned}$$

Therefore, to satisfy our assumption Eq.1, we must have a recurrsion formula

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\pi}{n+1}\alpha_{n-1} \tag{14}$$

Here we made a trick $n \to n-1$ for later convenience.

Now we observe this Equation.14 by separating n into two cases such that n is even or odd.
Case : n is even
Let $n = 2k$ then

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} = \alpha_{2k+1} &= \frac{2\pi}{2k+1}\,\frac{2\pi}{2k-1}\,\frac{2\pi}{2k-3}\,\frac{2\pi}{2k-5}\cdots\frac{2\pi}{3}\,\alpha_1 && (15)\\
&\quad |\ \alpha_1 = 2 && (16)\\
&= 2(2\pi)^k\left(\prod_{l=0}^{k}(2l+1)\right)^{-1} && (17)\\
&= \pi^k\sqrt{\pi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}}\,\prod_{l=0}^{k}(2l+1)\right)^{-1} && (18)
\end{aligned}$$

[1] See http://mathworld.wolfram.com/WallisCosineFormula.html
[2] See http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html

At this moment, we introduce a proparty of a gamma function[3] such that, for $m = 1, 3, 5, ...,$

$$\Gamma(m/2) \quad = \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(m-1)/2}} \prod_{l=0}^{(m-3)/2} (2l+1) \tag{19}$$

By comparing Eq.18 and Eq.19, we could say $k = (m-3)/2$, or $m = 2k+3$ and $k+1 = (m-1)/2$. Therefore, Eq.18 becomes

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{2k+1} \quad = \quad \frac{\pi^{(2k+1)/2}}{\Gamma((2k+3)/2)} = \frac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+3)/2)} \tag{20}$$

Next,
Case : n is odd
Let $n = 2k+1$ then

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} = \alpha_{2k+2} \quad &= \quad \frac{2\pi}{2k+2}\,\frac{2\pi}{2k+0}\,\frac{2\pi}{2k-2}\,\frac{2\pi}{2k-4} \cdots \frac{2\pi}{4}\,\alpha_2 && (21)\\
& \quad\ \mid \alpha_2 = \pi && (22)\\
&= \quad \pi(2\pi)^k \left(\frac{1}{2}\prod_{l=0}^{k}(2l+2)\right)^{-1} && (23)\\
&= \quad (2\pi)^{k+1}\left(2^{k+1}\prod_{l=0}^{k}(l+1)\right)^{-1} && (24)\\
&= \quad \frac{\pi^{k+1}}{(k+1)!} && (25)
\end{aligned}$$

For an integer m, $\Gamma(m) = (m-1)!$. Therefore, Eq.25 becomes

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{2k+2} \quad = \quad \frac{\pi^{k+1}}{\Gamma(k+2)} = \frac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+3)/2)} \tag{26}$$

Surprisingly, Eq.20 and Eq.26 agree. Thus, for any natural number of n, we have

$$\alpha_{n+1} \quad = \quad \frac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+3)/2)} \tag{27}$$

Finally, after playing index tricks on Eq.27, combine Eq.1, we derive n-dimensional spherical volume as

$$V_n \quad = \quad \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((n+2)/2)} R^n \tag{28}$$

[3] See Eq.54 of http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html