物理学基礎論 B レポート 07

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成 26 年 1 月 20 日

1　ベクトル演習

以下のベクトル $\boldsymbol{A}$ について発散 $(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})$ と回転 $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$ を、ベクトルの大きさの 2 乗 $|\boldsymbol{A}|^2$ について勾配 $(\boldsymbol{\nabla}|\boldsymbol{A}|^2)$ とラプラシアン $(\nabla^2|\boldsymbol{A}|^2)$ を求めよ。ただし $<x,\, y,\, z>$ は直交座標系、$<r,\, \theta,\, \phi>$ は球座標系とする。尚、α は定数、$\hat{\boldsymbol{a}}$ はあるベクトル $\boldsymbol{a}$ の単位ベクトルである。

1. $\boldsymbol{A} \;=\; yz\hat{\boldsymbol{x}} + xz\hat{\boldsymbol{y}} + xy\hat{\boldsymbol{z}}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) \;=\; 0 \\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} \;=\; (x-x)\hat{\boldsymbol{x}} + (y-y)\hat{\boldsymbol{y}} + (z-z)\hat{\boldsymbol{z}} \;=\; \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{\nabla}|\boldsymbol{A}|^2 &= \left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2) \;=\; 2x(y^2+z^2)\hat{\boldsymbol{x}} + 2y(x^2+z^2)\hat{\boldsymbol{y}} + 2z(x^2+y^2)\hat{\boldsymbol{z}} \\
\nabla^2|\boldsymbol{A}|^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2) \;=\; 2(x^2+y^2+z^2)
\end{aligned}
$$

2. $\boldsymbol{A} \;=\; \hat{\boldsymbol{r}} + \hat{\boldsymbol{\phi}}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\,0) + \frac{\partial}{\partial\phi}(r)\right) \;=\; \frac{2}{r} \\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\phi \\ 1 & 0 & r\sin\theta \end{vmatrix} \;=\; \frac{\cot\theta}{r}\hat{\boldsymbol{r}} - \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
\boldsymbol{\nabla}|\boldsymbol{A}|^2 &= \left(\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)2 \;=\; \boldsymbol{0} \\
\nabla^2|\boldsymbol{A}|^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}2\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}2\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}2 \;=\; 0
\end{aligned}
$$

3. $\boldsymbol{A} \;=\; (x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}})/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
このベクトル $\boldsymbol{A} \;=\; (x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}})/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ は $\hat{\boldsymbol{r}}$ です。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \;=\; \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{vmatrix} \\
&= \hat{\boldsymbol{x}}\frac{-2yz+2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{-2xz+2xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{-2xy+2xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \;=\; \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla|\boldsymbol{A}|^2 &= \left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)1 \;=\; \boldsymbol{0} \\
\nabla^2|\boldsymbol{A}|^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)1 \;=\; 0
\end{aligned}
$$

4. $\boldsymbol{A} \;=\; (-y\hat{\boldsymbol{x}}+x\hat{\boldsymbol{y}})/\sqrt{x^2+y^2}$
   このベクトル $\boldsymbol{A} \;=\; (-y\hat{\boldsymbol{x}}+x\hat{\boldsymbol{y}})/\sqrt{x^2+y^2}$ は $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ です。

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \;=\; \frac{xy-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \;=\; 0 \\
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \;=\; \frac{\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\nabla|\boldsymbol{A}|^2 &= \left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)1 \;=\; \boldsymbol{0} \\
\nabla^2|\boldsymbol{A}|^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)1 \;=\; 0
\end{aligned}
$$

5. $\boldsymbol{A} \;=\; \hat{\boldsymbol{r}}\exp(-r/\alpha)/r$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\exp(-r/\alpha)/r) \;=\; \frac{1-r/\alpha}{r^2}\exp(-r/\alpha) \\
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\phi \\ \exp(-r/\alpha)/r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{0} \\
\nabla|\boldsymbol{A}|^2 &= \left(\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\frac{\exp(-2r/\alpha)}{r^2} \;=\; \hat{\boldsymbol{r}}\frac{2(1-r/\alpha)\exp(-2r/\alpha)}{r^3} \\
\nabla^2|\boldsymbol{A}|^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\exp(-2r/\alpha)}{r^2}\right) \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{2(1-r/\alpha)\exp(-2r/\alpha)}{r^3}\right) \\
&= \left(\frac{4}{\alpha^2}-\frac{1+2r/\alpha}{r^2}\right)\exp(-2r/\alpha) \;=\; \left(\frac{2}{\alpha}-\frac{1+\sqrt{5}}{r}\right)\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{1-\sqrt{5}}{r}\right)\exp(-2r/\alpha)
\end{aligned}
$$

2　静電ポテンシャル

ポアソン方程式を用いて、以下の単位面積あたりの電荷密度 ρ がもたらす静電ポテンシャルを求めよ。ただし ρ_0 と R は定数とする。

1. $\rho = \begin{cases} \rho_o r & \text{for } r \le R \\ 0 & \text{for } r > R \end{cases}$
   $r \le R$ において、ポアソン方程式を解くと

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) &= -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}r \\
\int\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)dr &= -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\int r^3 dr \\
r^2\frac{\partial\phi}{\partial r} &= -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\frac{r^4}{4}+A \\
\int\frac{\partial\phi}{\partial r}dr &= \int\left(-\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{4}+\frac{A}{r^2}\right)dr
\end{aligned}
$$

$$\phi_{in}(r) \quad = \quad -\frac{\rho_o}{12\varepsilon_0}r^3 - \frac{A}{r} + B$$

ただし、A、B は定数。

また $r > R$ において、ポアソン方程式はラプラス方程式となるので静電ポテンシャルの一般解は

$$\phi_{out}(r) \quad = \quad -\frac{C}{r} + D$$

ただし、C、D は定数。

$r = 0$ において、静電ポテンシャルは有限であるので

$$A \quad = \quad 0$$

$r \to \infty$ において静電ポテンシャルをゼロとすると

$$D \quad = \quad 0$$

$r = R$ において、密度は有限なので、静電ポテンシャルは連続でなめらかである。よって、

$$\phi_i n(R) \; = \; \phi_{out}(R) \quad \text{より} \quad -\frac{\rho_o}{12\varepsilon_0}R^3 + B \; = \; -\frac{C}{R}$$
$$\left[\frac{\partial \phi_{out}}{\partial r}\right]_R - \left[\frac{\partial \phi_{in}}{\partial r}\right]_R \; = \; 0 \quad \text{より} \quad -\frac{\rho_o}{4\varepsilon_0}R^2 \; = \; \frac{C}{R^2}$$

以上を解くと

$$\phi(r) = \begin{cases} -\dfrac{\rho_o}{12\varepsilon_0}r^3 + \dfrac{\rho_o R^3}{3\varepsilon_0} & \text{for } r > R \\ \dfrac{\rho_o R^4}{4\varepsilon_0 r} & \text{for } r > R \end{cases}$$

2. $\rho = \begin{cases} \rho_o r^2 & \text{for } r \leq R \\ 0 & \text{for } r > R \end{cases}$

先の問題と同様に $r \leq R$ においてポアソン方程式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) \quad = \quad -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}r^2$$

を解くと、

$$\phi_{in}(r) \quad = \quad -\frac{\rho_o}{20\varepsilon_0}r^4 - \frac{A}{r} + B$$

また $r > R$ についても同様に

$$\phi_{out}(r) \quad = \quad -\frac{C}{r} + D$$

が得られる。

$r = 0$ において、静電ポテンシャルは有限であるので

$$A \quad = \quad 0$$

$r \to \infty$ において静電ポテンシャルをゼロとすると

$$D = 0$$

$r = R$ において、密度は有限なので、静電ポテンシャルは連続でなめらかである。よって、

$$\phi_i n(R) = \phi_{out}(R) \quad \text{より} \quad -\frac{\rho_o}{20\varepsilon_0}R^4 + B = -\frac{C}{R}$$
$$\left[\frac{\partial \phi_{out}}{\partial r}\right]_R - \left[\frac{\partial \phi_{in}}{\partial r}\right]_R = 0 \quad \text{より} \quad -\frac{\rho_o}{5\varepsilon_0}R^3 = \frac{C}{R^2}$$

以上を解くと

$$\phi(r) = \begin{cases} -\dfrac{\rho_o}{20\varepsilon_0}r^4 + \dfrac{\rho_o R^4}{4\varepsilon_0} & \text{for } r \le R \\ \dfrac{\rho_o R^4}{5\varepsilon_0 r} & \text{for } r > R \end{cases}$$

3. $\rho = \rho_0 \exp(-r)$

ポアソン方程式を解くと

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) &= -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\exp(-r) \\
\int \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)dr &= -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\int r^2\exp(-r)dr \\
r^2\frac{\partial \phi}{\partial r} &= -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\left(-r^2\exp(-r) - 2r\exp(-r) - 2\exp(-r)\right) + A \\
\int \frac{\partial \phi}{\partial r}dr &= -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\int\left(-\exp(-r) - \frac{2\exp(-r)}{r} - \frac{2\exp(-r)}{r^2}\right)dr + \int\frac{A}{r^2}dr \\
&= -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\left\{\exp(-r) - \int\frac{2\exp(-r)}{r}dr - \left(\frac{-2\exp(-r)}{r} - \int\frac{2\exp(-r)}{r}dr\right)\right\} - \frac{A}{r} + B
\end{aligned}$$

積分の部分は打ち消しあうので、よって

$$\phi(r) = -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{2}{r}\right)\exp(-r) - \frac{A}{r} + B$$

また、境界条件を考えると、静電ポテンシャルは $r = 0$ にて有限であるためには、

$$\lim_{r\to 0}\left(-\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\frac{2\exp(-r)}{r} - \frac{A}{r}\right)$$

が有限でなければならず、これを満たすためには

$$A = -\frac{2\rho_o}{\varepsilon_0}$$

でなければならない。

また、 $r \to \infty$ においてゼロとするため

$$B = 0$$

となる。結果、

$$\phi(r) = -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{2}{r}\right)\exp(-r) + \frac{2\rho_o}{\varepsilon_0 r}$$

尚、

$$\lim_{r\to 0}\frac{1-\exp(-r)}{r} \quad = \quad 1$$

であるため、原点における静電ポテンシャルは

$$\phi(r=0) \quad = \quad \frac{\rho_o}{\varepsilon_0}$$

となる事に注意されたい。

4. $\rho = \rho_0 r\exp(-r)$ 先の問題と同様にポアソン方程式、

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) \quad = \quad -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}r\exp(-r)$$

を解くと、

$$\begin{aligned}
r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}dr &= -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\int r^3\exp(-r)dr \\
&= \frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\left(r^3+3r^2+6r+6\right)\exp(-r)+A \\
\phi &= \frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\left\{\int r\exp(-r)dr+3\int\exp(-r)dr+6\int\frac{\exp(-r)}{r}dr+6\int\frac{\exp(-r)}{r^2}dr\right\}-\frac{A}{r}+B \\
&= \frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\left\{-r\exp(-r)-4\exp(-r)+6\int\frac{\exp(-r)}{r}dr+6\left(-\frac{\exp(-r)}{r}-\int\frac{\exp(-r)}{r}dr\right)\right\}-\frac{A}{r}+B \\
&= \frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\left\{-r\exp(-r)-4\exp(-r)-6\frac{\exp(-r)}{r}\right\}-\frac{A}{r}+B
\end{aligned}$$

また、境界条件を考えると、静電ポテンシャルは $r=0$ にて有限であるためには、

$$\lim_{r\to 0}\left(-\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\frac{6\exp(-r)}{r}-\frac{A}{r}\right)$$

が有限でなければならず、これを満たすためには

$$A \quad = \quad -\frac{6\rho_o}{\varepsilon_0}$$

でなければならない。

また、

$$\lim_{r\to\infty} r\exp(-r) \quad = \quad 0$$

であるので、$r\to\infty$ において静電ポテンシャルをゼロとするためには、

$$B \quad = \quad 0$$

となる。結果、

$$\phi(r) \quad = \quad -\frac{\rho_o}{\varepsilon_0}\left(r+4+\frac{6}{r}\right)\exp(-r)+\frac{6\rho_o}{\varepsilon_0 r}$$

尚、原点における静電ポテンシャルは

$$\phi(r=0) \quad = \quad \frac{2\rho_o}{\varepsilon_0}$$

となる。

3　導体の立方体

一辺の長さが a の立方体の導体が、一定の電場 $\boldsymbol{E}_0$ の中にある。立方体のある一面と電場 $\boldsymbol{E}_0$ が垂直であるとき、立方体の表面に出来る電荷の分布を求めよ。

立方体のある一面に並行な底面 A を持つ高さ d の直方体の閉曲面について考える。底面積 A が立方体の一面の面積より十分に小さいとすると、導体内部における電場はゼロなので、ガウスの法則より

$$\boldsymbol{E}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} A \quad = \quad \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

ここで、$\hat{\boldsymbol{n}}$ は閉曲面のある立方体のある一面の垂直単位ベクトル、σ はその面の電荷面密度である。ここで、$\boldsymbol{E}_0$ の方向を上向きと規定すると、左辺の内積は上下の面以外の側面においてゼロである。また上下面においては内積の符号が反転する事も直ぐにわかる。ゆえに、

$$\sigma \quad = \quad \begin{cases} \varepsilon_0 E_0 & \text{上面} \\ 0 & \text{側面} \\ -\varepsilon_0 E_0 & \text{下面} \end{cases}$$

4　導体の球

半径 R の球の導体が総量 Q の電荷を持っている。電荷の分布と任意の位置の静電ポテンシャルを求めよ。

電場を求めてからだと簡単すぎるので、ポアソンの方程式を用いた解法を載せる。

電荷は導体の表面にのみ存在するので、導体表面における電荷面密度 σ は

$$\sigma \quad = \quad \frac{Q}{4\pi R^2} \tag{1}$$

もしくはデルタ関数を用いて、単位体積あたりの電荷密度 ρ は

$$\rho \quad = \quad \sigma\delta(r-R) \; = \; \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R)$$

導体の表面を除いて、電荷は存在しないので、静電ポテンシャルはラプラス方程式の一般解

$$\phi \quad = \quad \frac{A}{r} + B$$

の形を取り、導体の内外においてそれぞれ

$$\begin{aligned} \phi_{in}(r<R) \quad &= \quad \frac{A_{in}}{r} + B_{in} \\ \phi_{out}(r>R) \quad &= \quad \frac{A_{out}}{r} + B_{out} \end{aligned}$$

となる。

境界条件を考えると、
$r=0$ において、静電ポテンシャルは有限であるため、

$$A_{in} \quad = \quad 0$$

$r \to \infty$ において、静電ポテンシャルをゼロとすると、

$$B_{out} \quad = \quad 0$$

$r = R$ において、静電ポテンシャルは連続で無ければならないので、

$$\begin{aligned}\phi_{in}(R) &= \phi_{out}(R) \\ \frac{A_{in}}{R} + B_{out} &= \frac{A_{out}}{R} + B_{out}\end{aligned}$$

また、$r = R$ において、静電ポテンシャルの一次係数は不連続だが、その大きさは

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \to 0}\left[\frac{\partial \phi}{\partial r}\right]_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} &= -\lim_{\epsilon \to 0}\int r^2 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\delta(r-R)dr \\ -\frac{A_{out}}{R^2} + \frac{A_{in}}{R^2} &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\end{aligned}$$

である。以上の４条件を解くと、

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & \text{for } r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{for } r > R \end{cases}$$

5　多層の導体の平面

　単位面積あたりの電荷密度が σ である無限に広い面 S の上に、距離 a だけ離して平行に厚さ d の無限に広い導体の板 C を固定した。この時、導体 C の上下の面それぞれの電荷密度と、面 S から任意の高さ h の位置の電場を求めよ。

一定の電荷面密度 σ をもつ無限に広い面の上の電場 $\boldsymbol{E}$ は面から垂直方向に

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

であることは、（面の下の電場はゼロではない）ガウスの法則より容易に求められる。この電場中に導体の板 C をかざした時、導体 C の中の電場はゼロである。導体 C の上下面に対し、それぞれ底面積 A 高さ l の直方体の閉曲面を取り、ガウスの法則を適用すると、

$$\boldsymbol{E}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} A = \frac{\sigma' A}{\varepsilon_0}$$

であり、導体の上下の面の電荷面密度 σ' はそれぞれ

$$\sigma' = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} & \text{上面} \\ -\frac{\sigma}{2} & \text{下面} \end{cases}$$

となる。また面 S から任意の高さ h における電場 $\boldsymbol{E}$ は面から垂直方向に

$$E(h) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{for } 0 \leq h < a \\ 0 & \text{for } a \leq h < a + d \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{for } r > a + d \end{cases}$$

6　多層の導体の球

　総電荷 Q を持つ半径 a の球の導体 A の周りを、内径が $2b$、外径が $2c$ の球殻で電荷的に中性な導体 B が覆っている。導体 A と B が同じ中心を持つ時、導体 B の内側と外側の電荷の分布と、中心から任意の距離 r の静電ポテンシャルを求めよ。

導体の内部では電場が存在しないことから中心からの距離 r が $r < a$、$b < r < c$ の範囲で $E = 0$ であり、電荷は $r = a$、$r = b$、$r = c$ に球殻状に存在することが解る。半径 $r = a$、$r = b$、$r = c$ での導体の表面の電荷面密度をそれぞれ σ_a、σ_b、σ_c とすると、半径 R の閉曲面を考え、それに内包される総電荷量を考えると

$$\begin{aligned} a < R < b \text{ において} \qquad 4\pi a^2\sigma_a &= Q \\ b < R < c \text{ において} \qquad 4\pi a^2\sigma_a + 4\pi b^2\sigma_b &= 0 \\ c < R \text{ において} \qquad 4\pi a^2\sigma_a + 4\pi c^2\sigma_a + 4\pi c^2\sigma_c &= Q \end{aligned}$$

これらを解くと

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{Q}{4\pi a^2} \\ \sigma_b &= -\frac{Q}{4\pi b^2} \\ \sigma_c &= \frac{Q}{4\pi c^2} \end{aligned}$$

また電場 $\boldsymbol{E}$ は半径方向に広がり、

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \le r < a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{for} \quad a \le r < b \\ 0 & \text{for} \quad b \le r < c \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{for} \quad r > c \end{cases}$$

であるので、静電ポテンシャル ϕ を $r \to \infty$ にてゼロとすると、
$r > c$ においては

$$\phi = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$b \le r < c$ においては

$$\phi = -\int_\infty^r E(r)dr = -\int_\infty^c \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

$a \le r < b$ においては

$$\phi = -\int_\infty^r E(r)dr = -\int_\infty^c \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr - \int_b^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$0 \le r < a$ においては

$$\phi = -\int_\infty^r E(r)dr = -\int_\infty^c \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$