物理学基礎論Bレポート09 - 解答

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成26年1月20日

1　RC回路

起電力 $\mathscr{E}$ の直流電源に電気抵抗 R の抵抗と電気容量 C のコンデンサーが並列に繋がっている。回路が繋がってから十分に長い時間が経った時、

1. 抵抗に流れる電流を求めよ。

   コンデンサーの充電は終わっているので、電源から流れる電流は全て抵抗を通る。よって電流 I は、定義より

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}$$

2. 抵抗におけるジュール熱を求めよ。

   ジュール熱 P(Joules / second) は定義より

$$P = RI^2 = \frac{\mathscr{E}^2}{R}$$

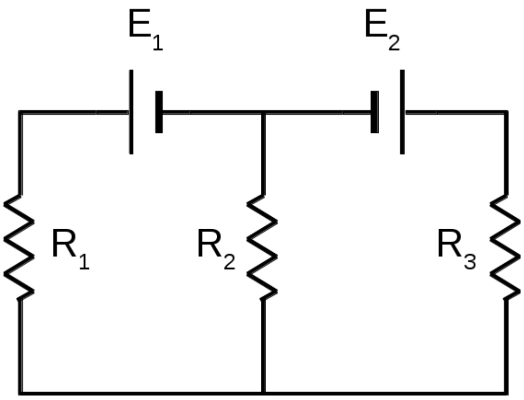
3. コンデンサーに貯められているエネルギーを求めよ。

   コンデンサーには電圧 $\mathscr{E}$ がかかっているので、蓄えられているエネルギー U は、定義より、

$$U = \frac{1}{2}C\mathscr{E}^2$$

2 R 回路

起電力 $\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$ の直流電源 E_1、E_2 に電気抵抗が R_1、R_2、R_3 である抵抗が図のように繋がっている。各抵抗に流れる電流と発生するジュール熱を求めよ。



それぞれの抵抗に流れる電流を図の下向きにそれぞれ I_1、I_2、I_3 とすると、2 通りの電流の経路が考えられる。即ち $E1 \to R1 \to R2 \to E1$ と $E2 \to R3 \to R2 \to E2$ であり、オームの法則よりそれぞれの経路の電圧と起電力の釣り合いを考えると、

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_1 &= I_1R_1 - I_2R_2 \\
\mathscr{E}_2 &= I_3R_3 - I_2R_2
\end{aligned}
$$

また 3 つの抵抗の接続点に注目して、流れ込む電流と流れ出す電流の釣り合いを考えると

$$
I_1 + I_3 = -I_2
$$

以上を各電流について解くと

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{(R_2+R_3)\mathscr{E}_1 - R_2\mathscr{E}_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\
I_2 &= -\frac{R_3\mathscr{E}_1 + R_1\mathscr{E}_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\
I_1 &= \frac{(R_1+R_2)\mathscr{E}_2 - R_2\mathscr{E}_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}
\end{aligned}
$$

3 正四面体の抵抗回路

電気抵抗が R である同一の抵抗を 6 個、正四面体の各辺になるようにつなぎ合わせた。ある 2 頂点に電極を継ぎ電流を流した時、この正四面体の回路の電気抵抗を求めよ。

正四面体の各頂点を A、B、C、D とし、電極を A と D に継いだとする。この時頂点 $B - C$ 間には電位差は存在しないため電流は流れず、結果として $A \to D$、$A \to B \to D$、$A \to C \to D$ の 3 経路の並列回路である。ゆえに回路全体の抵抗 R_{total} は

$$
\begin{aligned}
R_{total} &= \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} \\
&= \frac{R}{2}
\end{aligned}
$$

4　球の抵抗

　中心を共有する半径 a と半径 $b(a<b)$ の二つの金属球殻の間を電気伝導率が σ である物質が満たしている。内側と外側の金属球殻の間に電位差 V をかけたときに流れる電流を求めよ。また金属球殻の間の電気抵抗を求めよ。

中心を球殻と同じとする半径 $r(a<r<b)$ の球状の閉曲面について考える。二つの金属球殻間を流れる電流の総量を I とすると、電流は常に半径方向に流れるので閉曲面を貫く電流の量は一定で I でなければならない。よって電流密度 i は半径のみに依存し、閉曲面を貫く総量は保存されるので

$$\begin{aligned}4\pi r^2 i &= I\\ \boldsymbol{i} &= \frac{I}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\end{aligned}$$

また電場 E はオームの法則より

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{i}}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

したがって二つの球殻間の電位差 V は

$$\begin{aligned}V &= -\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot d\hat{\boldsymbol{r}}\\ &= \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\end{aligned}$$

よって二つの球殻間に流れる電流の総量 I は

$$I = \frac{4\pi\sigma Vab}{b-a}$$

また球殻間の電気抵抗 R は、定義より

$$R = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab}$$