CANS2D モデルパッケージ md_mhdsn

MHD超新星爆発

2006. 1. 9.

1　はじめに

このモデルパッケージは、2 次元平面内（軸対称 rz 面内）での一様磁場中での超新星爆発を解くためのものである。

2　仮定と基礎方程式

流体は非粘性・圧縮性・磁気拡散なしの磁気流体とする。計算領域は 2 次元円柱座標（rz 平面）で $\partial/\partial\phi = 0$、$V_\phi = 0$、$B_\phi = 0$ と仮定する。解くのは、 密度 ρ、圧力 p、速度 V_r、V_z、磁場 B_r、B_z についての 2 次元 MHD 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = -\frac{1}{r}(\rho V_r) \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_r) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho V_r^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_r^2}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho V_r V_z - \frac{B_r B_z}{4\pi}\right) = -\frac{1}{r}(\rho V_r^2 - \frac{B_r^2}{4\pi}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho V_r V_z - \frac{B_r B_z}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho V_z^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_z^2}{4\pi}\right) = -\frac{1}{r}\left(\rho V_r V_z - \frac{B_r B_z}{4\pi}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_r) - \frac{\partial}{\partial z}(E_\phi) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_z) + \frac{\partial}{\partial r}(E_\phi) = -\frac{1}{r}E_\phi \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{B^2}{8\pi}\right) \\ + \quad & \frac{\partial}{\partial r}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_r + \frac{B_z E_\phi}{4\pi}\right) \\ + \quad & \frac{\partial}{\partial z}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_z + \frac{-B_r E_\phi}{4\pi}\right) \\ = \quad & -\frac{1}{r}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_r + \frac{B_z E_\phi}{4\pi}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

$$E_\phi = -V_z B_r + V_r B_z \tag{7}$$

である。ここで、$V^2 = V_r^2 + V_z^2$、γ は比熱比。なお計算コード上では r は x 座標で、z は z 座標で表現されている。

3　無次元化

計算コードの中では、変数は以下のように無次元化して扱われる（表１参照)。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ L_0、 C_{S0}、L_0/C_{S0}。ここで、L_0 は、計算領域のサイズ、C_{S0} は初期爆発（原点）の音速。密度は初期一様状態の値 ρ_0 で無次元化する。以下、無次元化した変数を使う。

変数	規格化単位
r, z	L_0
V_r, V_z	C_{S0}
t	L_0/C_{S0}
ρ	ρ_0
p	$\rho_0 C_{\mathrm{S0}}^2$
B_r, B_z	$\sqrt{\rho_0 C_{\mathrm{S0}}^2}$

表 1: 変数と規格化単位

4　パラメータ・初期条件・計算条件・境界条件

$0 < r < 1$、$0 < z < 1$ の領域を解く。初期状態は以下のようなもの。サブルーチン `model` で設定する。

$$\rho = 1$$

$$p = p_{\mathrm{ism}} + (1/\gamma - p_{\mathrm{ism}}) \exp[-(r/w)^2]$$

$$V_r = V_z = 0$$

$$B_r = 0$$

$$B_z = \sqrt{8\pi p_{\mathrm{ism}} \alpha_0}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

で、α_0 は初期プラズマベータの逆数。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
比熱比 γ	5/3	`gm`	`model`
初期プラズマベータの逆数 α_0	10^5	`betai`	`model`
擾乱の印加範囲 w	0.02	`wexp`	`model`
周囲星間物質の圧力 p_{ism}	10^{-8}	`prism`	`model`

表 2: おもなパラメータ

境界条件は、以下の通り。サブルーチン `bnd` で設定。$z = 0$ は対称境界条件。すなわち V_z、B_r は「絶対値が等しく符号反転で鏡面配置」、ρ、p、V_r、B_z は「絶対値・符号が等しく鏡面配置」。$z = Z_{\mathrm{bnd}}$ で、自

由境界条件。すなわち、すべての物理量の z 方向微分がゼロ。$r = 0$ で、 対称境界条件。すなわち V_r、B_r は「絶対値が等しく符号反転で鏡面配置」、ρ、p、V_z、B_z は「絶対値・符号が等しく鏡面配置」。$r = R_{\rm bnd}$ で、自由境界条件。すなわち、すべての物理量の r 方向微分がゼロ。

計算パラメータは以下の通り（表 3 参照）。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
グリッド数 r 方向	203	`ix`	`main`
グリッド数 z 方向	202	`jx`	`main`
マージン	4	`margin`	`main`
終了時刻	5	`tend`	`main`
出力時間間隔	0.5	`dtout`	`main`
CFL 数	0.4	`safety`	`main`
進行時刻下限値	10^{-10}	`dtmin`	`main`

表 3: おもな数値計算パラメータ。マージンとは、境界の値を格納するための配列の「そで」部分の幅のこと。進行時刻下限値とは、各計算ステップの Δt の値がこの値を下回ったときに計算を強制終了するための臨界値。

5　参考文献