CANS3D モデルパッケージ md_emtube

浮上磁束管

2006. 1. 12.

1 はじめに

このモデルパッケージは、3 次元空間でのねじれ磁束管の浮上を解くためのものである。

2 仮定と基礎方程式

流体は非粘性・圧縮性・磁気拡散なし磁気流体とする。計算領域は 3 次元デカルト座標である。一様下向き（z 負方向）重力がかかっているとする。解くのは、 密度 ρ、圧力 p、速度 V_x、V_y、V_z 磁場 B_x、B_y、B_z についての 3 次元 MHD 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho V_x V_z - \frac{B_x B_z}{4\pi}\right) = \rho g_x \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_y^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_y^2}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho V_y V_z - \frac{B_y B_z}{4\pi}\right) = \rho g_y \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x V_z - \frac{B_x B_z}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_y V_z - \frac{B_y B_z}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho V_z^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_z^2}{4\pi}\right) = \rho g_z \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_x) + \frac{\partial}{\partial y}(E_z) - \frac{\partial}{\partial z}(E_y) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_x) - \frac{\partial}{\partial x}(E_z) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_z) + \frac{\partial}{\partial x}(E_y) - \frac{\partial}{\partial y}(E_x) = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{B^2}{8\pi}\right) \quad &+ \quad \frac{\partial}{\partial x}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_x + \frac{B_z E_y - B_y E_z}{4\pi}\right) \\ &+ \quad \frac{\partial}{\partial y}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_y + \frac{B_x E_z - B_z Ex}{4\pi}\right) \\ &+ \quad \frac{\partial}{\partial z}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_z + \frac{B_y E_x - B_x Ey}{4\pi}\right) = \rho g_x V_x + \rho g_y V_y \rho g_z V_z\end{aligned} \tag{8}$$

$$E_x = -V_y B_z + V_z B_y, \quad E_y = -V_z B_x + V_x B_z, \quad E_z = -V_x B_y + V_y B_x \tag{9}$$

である。ここで、γ は比熱比。

3 無次元化

計算コードの中では、変数は以下のように無次元化して扱われる（表１参照)。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ H_0、 C_{S0}、H_0/C_{S0}。ここで、H_0 は光球中の圧力スケール長、C_{S0} は光球中の音速。密度は $z=0$ での値 ρ_0 で無次元化する。以下、無次元化した変数を使う。

変数	規格化単位
x, y	H_0
V_x, V_y, V_z	C_{S0}
t	H_0/C_{S0}
ρ	ρ_0
p	$\rho_0 C_{\mathrm{S0}}^2$
B_x, B_y, B_z	$\sqrt{\rho_0 C_{\mathrm{S0}}^2}$
T	$C_{\mathrm{S0}}^2/(\gamma k_{\mathrm{B}}/m)$

表 1: 変数と規格化単位

4 パラメータ・初期条件・計算条件・境界条件

$|x| < X_{\mathrm{bnd}}$、$|y| < Y_{\mathrm{bnd}}$、$Z_{\min} < z < Z_{\max}$ の領域を解く。初期状態は以下のようなもの。サブルーチン `model` で設定する。

ガスは、対流層と光球・彩層（低温ガス）とコロナ（高温ガス）とからなる。一様重力・温度分布のもとでの力学平衡で圧力分布を決める。

$$g_x = 0, \quad g_y = 0, \quad g_z = -\frac{1}{\gamma}$$

これは、z 方向一様な強さの重力が負向きに分布していることを示す。

$$V_x = V_y = V_z = 0$$

$$T = T_{\mathrm{pho}} - \left(\alpha_{\mathrm{cnv}} \left| \frac{dT}{dz} \right|_{\mathrm{ad}} \right) z \quad (Z_{\mathrm{pho}} \le z < Z_{\mathrm{tr}})$$

$$T = T_{\mathrm{pho}} \quad (Z_{\mathrm{pho}} \le z < Z_{\mathrm{tr}})$$

$$T = T_{\mathrm{pho}} + (T_{\mathrm{cor}} - T_{\mathrm{pho}}) \left[\frac{z - Z_{\mathrm{tr}}}{Z_{\mathrm{cor}} - Z_{\mathrm{tr}}} \right] \quad (Z_{\mathrm{tr}} \le z < Z_{\mathrm{cor}})$$

$$T = T_{\mathrm{cor}} \quad (z \ge Z_{\mathrm{cor}})$$

これらの条件のもと、密度・圧力分布は次の式を解くことで求める。

$$\frac{dp}{dz} = \rho g_z$$

$$p = \rho T/\gamma$$

また、磁場は Gold-Hoyle 型のフォースフリー磁束管を対流層内に置く。ただし $r < R_{\rm t}$ の範囲のみ分布。

$$B_x = B_{\rm t} f(y,z)$$

$$B_y = B_{\rm t} f(y,z)[-q_{\rm t}(z - Z_{\rm t})]$$

$$B_z = B_{\rm t} f(y,z)[+q_{\rm t}(y - Y_{\rm t})]$$

$$f(y,z) = [1 + (q_{\rm t} r]^2)^{-1}, \quad r^2 = (y - Y_{\rm t})^2 + (z - Z_{\rm t})^2$$

とする。

この初期状態に以下のような密度擾乱を加える。

$$\rho = \rho_{\rm eq}\left[1 - a\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_p}\right)\right]\frac{1}{2}\left[\tanh\left(\frac{x + 3\lambda_p/4}{w_p}\right) - \tanh\left(\frac{x - 3\lambda_p/4}{w_p}\right)\right]$$

以上の式に現れた w_p は数値的な振動を防ぐための遷移幅で 0.5 にとっている。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
境界の位置 x 方向 $X_{\rm bnd}$	100	`xmax`	`model`
境界の位置 y 方向 $Y_{\rm bnd}$	100	`ymax`	`model`
境界の位置 z 方向 $Z_{\rm min}, Z_{\rm max}$	-22, 25	`zmin, zmax`	`model`
比熱比 γ	5/3	`gamma`	`model`
コロナ温度 $T_{\rm cor}$	25	`tcor`	`model`
コロナ下端 $z_{\rm cor}$	14	`zcor`	`model`
遷移層下端 $z_{\rm tr}$	10	`ztr`	`model`
光球下端 $z_{\rm pho}$	0	`zpho`	`model`
対流層温度勾配 $\alpha_{\rm cnv}$	1.4	`dtem0`	`model`
磁束管位置 $(y_{\rm t}, z_{\rm t}$	(0, -14)	`ytube, ztube`	`model`
磁束管磁場強度 $B_{\rm t}$	20	`btube`	`model`
磁束管半径 $R_{\rm t}$	4	`rtube`	`model`
磁束管ねじれ率 $q_{\rm t}$	0.2	`qtube`	`model`
擾乱の振幅 a	0.1	`amp`	`model`
擾乱の x 方向の波長・印加範囲 λ_p	25	`wptb`	`model`

表 2: おもなパラメータ

境界条件は、x、y 境界では周期境界。z 下側境界では、対称境界、すなわち V_z、B_z は「絶対値が等しく符号反転で鏡面配置」、ρ、p、V_x、Vy、B_x、B_y は「絶対値・符号が等しく鏡面配置」。z 上側境界では、ρ、p については初期平衡の勾配で外挿、それ以外は勾配ゼロで外挿。サブルーチン `bnd` で設定する。

計算パラメータは以下の通り（表 3 参照）。

5　参考文献

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
グリッド数 x 方向	30	`ix`	`main`
グリッド数 y 方向	55	`jx`	`main`
グリッド数 z 方向	105	`kx`	`main`
マージン	2	`margin`	`main`
終了時刻	150	`tend`	`main`
出力時間間隔	10	`dtout`	`main`
CFL 数	0.4	`safety`	`main`
進行時刻下限値	10^{-10}	`dtmin`	`main`

表 3: おもな数値計算パラメータ。マージンとは、境界の値を格納するための配列の「そで」部分の幅のこと。進行時刻下限値とは、各計算ステップの Δt の値がこの値を下回ったときに計算を強制終了するための臨界値。