CANS1D モジュール hdroe

流体エンジン Roe＋MUSCL＋TVD法

ver. 0.3 （2004年4月15日）

1　はじめに

このモジュールは、流体力学方程式・MHD方程式をRoe＋MUSCL＋TVD法（Roe 1981; Van Leer 1979; Harten 1983）で解くためのものです。

以下で、$\gamma(=$ 定数$)$ は比熱比、$c(=$ 定数$)$ は光速、他の記号は通常の意味。

2　移流

2.1　サブルーチン roe_a；移流

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x)=0 \tag{1}$$

ただし、V_x は空間 x の関数。

3　流体

3.1　サブルーチン roe_h；流体

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x)=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2+p)=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho V_x^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\frac{1}{2}\rho V_x^2\right)V_x\right]=0 \tag{4}$$

3.2　サブルーチン roe_h_g；流体重力

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x)=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2+p)=\rho g \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho V_x^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\frac{1}{2}\rho V_x^2\right)V_x\right]=\rho g V_x \tag{7}$$

ただし、重力加速度 g は空間 x の関数。

3.3　サブルーチン roe_h_c；流体非一様断面

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x S) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x S) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho V_x^2 + p)S\right] = p\frac{dS}{dx} \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho V_x^2\right)S\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{1}{2}\rho V_x^2\right)V_x S\right] = 0 \tag{10}$$

ただし、断面積 S は空間 x の関数。方程式は、Sterling, Shibata, Mariska (1993) を参考にした。

3.4　サブルーチン roe_h_cg；流体非一様断面重力

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x S) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x S) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho V_x^2 + p)S\right] = \rho g S + p\frac{dS}{dx} \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho V_x^2\right)S\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{1}{2}\rho V_x^2\right)V_x S\right] = (\rho g V_x)S \tag{13}$$

ただし、断面積 S・重力加速度 g は、ともに空間 x の関数。方程式は、Sterling, Shibata, Mariska (1993) を参考にした。

4　等温流体

等温流体では、エネルギー方程式を解かない。圧力 p は、状態方程式

$$p = \frac{k_{\mathrm{B}}}{m}\rho T \tag{14}$$

を用いて、ρ から求める。ここで、k_{B} は Boltzmann 定数、m は平均粒子質量、T は温度で、いずれも定数。

4.1　サブルーチン roe_ht；等温流体

第 3.1 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

4.2　サブルーチン roe_ht_g；等温流体重力

第 3.2 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

4.3　サブルーチン roe_ht_c；等温流体非一様断面

第 3.3 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

4.4 サブルーチン roe_ht_cg；等温流体非一様断面重力

第 3.4 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

5 MHD

Roe 型線形 Riemann 解法は、Nakajima & Hanawa (1996) を参考にした。

5.1 サブルーチン roe_m；MHD

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{4\pi}) = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}) = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y) - \frac{\partial}{\partial x}(cE_z) = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_x - \frac{cB_y E_z}{4\pi}\right] = 0 \tag{19}$$

$$cE_z = -V_x B_y + V_y B_x \tag{20}$$

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2, \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2 \tag{21}$$

考慮している空間座標 x 方向の磁場成分 B_x が一様・一定値のときに用いる。つまり、B_x は既知の定数。

5.2 サブルーチン roe_m_g；MHD 重力

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{4\pi}) = \rho g_x \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}) = \rho g_y \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y) - \frac{\partial}{\partial x}(cE_z) = 0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_x - \frac{cB_y E_z}{4\pi}\right] = \rho(g_x V_x + g_y V_y) \tag{26}$$

$$cE_z = -V_x B_y + V_y B_x \tag{27}$$

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2, \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2 \tag{28}$$

考慮している空間座標 x 方向の磁場成分 B_x が一様・一定値のときに用いる。つまり、B_x は既知の定数。重力加速度 g_x、g_y は空間 x の関数。

5.3 サブルーチン roe_m_bg；MHD 非一様磁場・重力

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{B_s}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\rho V_s}{B_s}\right)=0 \tag{29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V_s}{B_s}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left[(\rho V_s^2+p+\frac{B^2}{8\pi}-\frac{B_s^2}{8\pi})\frac{1}{B_s}\right]=\frac{\rho}{B_s}\left[g_s+(V_\theta^2-\frac{B_\theta^2}{4\pi\rho})\frac{1}{R}\frac{dR}{ds}\right]+(p+\frac{B^2}{8\pi})\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{B_s}\right) \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V_\theta R}{B_s}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left[(\rho V_s V_\theta-\frac{B_s B_\theta}{4\pi})\frac{R}{B_s}\right]=0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B_\theta}{RB_s}\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{cE_\xi}{RB_s}\right)=0 \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho V^2+\frac{B^2}{8\pi}\right)\frac{1}{B_s}\right]+\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left[(\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\frac{1}{2}\rho V^2)V_s-\frac{cB_\theta E_\xi}{4\pi}\right]\frac{1}{B_s}\right\}=\frac{\rho g_s V_s}{B_s} \tag{33}$$

$$cE_\xi=-V_s B_\theta+V_\theta B_s \tag{34}$$

$$B^2=B_x^2+B_y^2, \quad V^2=V_x^2+V_y^2 \tag{35}$$

軸対称（$\partial/\partial\theta=0$）な状況を考えていて、曲線直交座標系 (s,θ,ξ) をとる（図 1）。座標 s は、磁場のポロイダル成分に沿った方向。座標 θ は、対称軸のまわりの方位角。座標 ξ は、s と θ とに対して垂直な方向。$R(s)$ は対称軸からの距離、$B_s(s)$ は磁場のポロイダル成分。$R(s)$ と $B_s(s)$ は与えられた既知関数で、値はゼロにしてはいけない。Hollweg, Jackson, Galloway (1982) を参考にした。

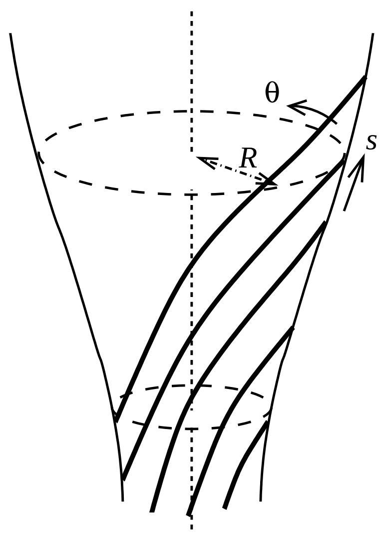

図 1: サブルーチン mlw_m_cg.f が想定している曲線座標系 (s,θ,ξ)。太線は磁力線を表す。点線は対称軸。

5.4 サブルーチン roe_m3；3 成分 MHD

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{4\pi}) = 0 \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}) = 0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_z - \frac{B_x B_z}{4\pi}) = 0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y) - \frac{\partial}{\partial x}(cE_z) = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_z) + \frac{\partial}{\partial x}(cE_y) = 0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_x - \frac{cB_yE_z}{4\pi} + \frac{cB_zE_y}{4\pi}\right] = 0 \tag{42}$$

$$cE_y = -V_zB_x + V_xB_z, \quad cE_z = -V_xB_y + V_yB_x \tag{43}$$

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2, \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \tag{44}$$

考慮している空間座標 x 方向の磁場成分 B_x が一様・一定値のときに用いる。つまり、B_x は既知の定数。

5.5 サブルーチン roe_m3_g；3 成分 MHD 重力

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0 \tag{45}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{4\pi}) = \rho g_x \tag{46}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}) = \rho g_y \tag{47}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_z - \frac{B_x B_z}{4\pi}) = \rho g_z \tag{48}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y) - \frac{\partial}{\partial x}(cE_z) = 0 \tag{49}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_z) + \frac{\partial}{\partial x}(cE_y) = 0 \tag{50}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_x - \frac{cB_yE_z}{4\pi} + \frac{cB_zE_y}{4\pi}\right] = \rho(g_xV_x + g_yV_y + g_zV_z) \tag{51}$$

$$cE_y = -V_zB_x + V_xB_z, \quad cE_z = -V_xB_y + V_yB_x \tag{52}$$

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2, \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \tag{53}$$

考慮している空間座標 x 方向の磁場成分 B_x が一様・一定値のときに用いる。つまり、B_x は既知の定数。
重力加速度 g_x、g_y、g_z は空間 x の関数。

6　等温 MHD

Roe 型線形 Riemann 解法は、Fukuda & Hanawa (1999) を参考にした。

6.1　サブルーチン roe_mt；

第 5.1 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

6.2　サブルーチン roe_mt_g；

第 5.2 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

6.3　サブルーチン roe_m3t；

第 5.4 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

6.4　サブルーチン roe_m3t_g；

第 5.5 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

参考文献

Fukuda, N., and Hanawa, T., 1999, ApJ, 517, 226.
Harten, 1983, J. Comp. Phys., 49, 357
Hollweg, J. V., Jackson, S., and Galloway, D., 1982, Sol. Phys., 75, 35.
Nakajima, Y., and Hanawa, T., 1996, ApJ, 467, 321.
Roe, 1981, J. Comp. Phys., 43, 357
Sterling, A. C., Shibata, K., and Mariska, J. T., 1993, ApJ, 407, 778.
Van Leer, 1979, J. Comp. Phys., 32, 101