CANS2D モデルパッケージ md_mricyl

回転円柱内での磁気回転不安定

2006.1.12

1　はじめに

このモデルパッケージは、回転円柱内での磁気回転不安定をシミュレーションするためのものである。

2　仮定と基礎方程式

流体は非粘性・圧縮性・磁気拡散なしの磁気流体とする。計算領域は 2 次元円柱座標（rz 平面）で $\partial/\partial\phi = 0$ と仮定する。重力場が存在する（関数形は後述）。解くのは、 密度 ρ、圧力 p、速度 V_r、V_ϕ、V_z 磁場 B_r、B_ϕ、B_z についての 2 次元 MHD 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = -\frac{1}{r}(\rho V_r) \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_r) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho V_r^2 + p\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho V_r V_z\right) = -\frac{1}{r}(\rho V_r^2) + \rho g_r \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho V_r V_z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho V_z^2 + p\right) = -\frac{1}{r}\left(\rho V_r V_z\right) + \rho g_z \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V^2\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_r\right)\\ +\quad &\frac{\partial}{\partial z}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_z\right) = -\frac{1}{r}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_r\right) + \rho g_r V_r + \rho g_z V_z\end{aligned} \tag{4}$$

である。ここで、γ は比熱比。なお計算コード上では r は x 座標で、ϕ は y 座標で、z は z 座標で表現されている。

3　無次元化

計算コードの中では、変数は以下のように無次元化して扱われる（表 1 参照）。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ R_0、 V_{K0}、R_0/V_{K0}。ここで、R_0 は、密度が極大値になる半径、V_{K0} は R_0 での Kepler 速度。密度は R_0 での値 ρ_0 で無次元化する。以下、無次元化した変数を使う。

変数	規格化単位
r, z	R_0
V_r, V_ϕ, V_z	$V_{\rm K0}$
t	$R_0/V_{\rm K0}$
ρ	ρ_0
p	$\rho_0 V_{\rm K0}^2$
B_r, B_ϕ, B_z	$\sqrt{\rho_0 V_{\rm K0}^2}$

表 1: 変数と規格化単位

4 パラメータ・初期条件・計算条件・境界条件

$0 < r < R_{\rm bnd}$、$0 < z < Z_{\rm bnd}$ の領域を解く。初期状態は以下のようなもの。サブルーチン `model` で設定する。回転軸上に存在する重力源による重力ポテンシャル中で回転する円柱を考える。単位質量あたりの角運動量分布を与えればポリトロープガスについては厳密解（Abramowicz, Jaroszynski & Sikora 1978）が求まる。つまり

$$rV_\phi = R_0 V_{\phi 0}(r/R_0)^a$$

$$p_{\rm d} \propto \rho_{\rm d}^{1+1/n}$$

ここで L_0、R_0 は定数。このとき円柱内では

$$\phi_g + \frac{V_{\phi 0}^2}{2(1-a)}\left(\frac{r}{R_0}\right)^{2a-2} + (n+1)\frac{p_{\rm d}}{\rho_{\rm d}} = \Psi_{\rm o}$$

が成り立つ。ϕ_g は（与えられた）重力ポテンシャル。$\Psi_{\rm o}$ は定数で。基準点 $(r, z) = (R_0, 0)$ での値を用いて、

$$\Psi_{\rm o} = \phi_{g0} + \frac{V_{\phi 0}^2}{2(1-a)} + (n+1)\frac{k_{\rm B}}{m}T_{\rm d0}$$

ここでは、基準点において円柱は Kepler 回転をしているとする。

$$V_{\phi 0} = V_{K0} \equiv \sqrt{GM/R_0}$$

円柱温度は

$$(k_{\rm B}/m)T_{\rm d0} = E_{\rm th}\ V_{\rm K0}^2$$

でパラメータ $E_{\rm th}$ できめる。

また円柱の外には高温ガスコロナが存在する。温度一様で回転なしとする。中心重力場における静水圧平衡で分布が決まり

$$\rho_{\rm c} = \rho_{\rm c0}\ \exp\left[-\frac{1}{(k_{\rm B}/m)T_{\rm c0}}(\phi_g - \phi_{g0})\right]$$

$$p_{\rm c} = (k_{\rm B}/m)\rho_{\rm c} T_{\rm c}$$

以上より、

$$\rho = \rho_{\rm d} + \rho_{\rm c}$$

$$p = p_{\mathrm{d}} + p_{\mathrm{c}}$$

として密度・圧力の初期分布をつくる。また円柱部の回転以外の速度成分はすべてゼロとする。ここに一様強度で回転軸方向の磁場をかける。

$$B_z = B_0, \quad B_r = 0, \quad B_\phi = 0$$

ただし磁場は

$$B_0 = \sqrt{E_{\mathrm{mg}}\ 4\pi\rho_0 V_{\mathrm{K0}}^2}$$

でパラメータ E_{mg} から決める。重力場は次のように与える。

$$g_r = -\frac{\partial \phi_g}{\partial r}, \quad g_z = 0$$

$$\phi_g = -\frac{GM}{r}, \qquad (\text{for} \ \ r > s_{\mathrm{g0}})$$

$$\phi_g = -\frac{GM}{s_{\mathrm{g0}}}\left(2 - \frac{r}{s_{\mathrm{g0}}}\right), \qquad (\text{for} \ \ s_{\mathrm{g0}}/2 < r < s_{\mathrm{g0}})$$

$$\phi_g = -\frac{3GM}{2s_{\mathrm{g0}}}, \qquad (\text{for} \ \ r < s_{\mathrm{g0}}/2)$$

この平衡状態に、次のような擾乱を加える。

$$V_\phi = V_{\phi;\mathrm{eq}}(r)\ [a \sin(2\pi z/\lambda)]$$

ここで $V_{\phi;\mathrm{eq}}(r)$ は、平衡状態の回転角速度分布。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
境界の位置 r 方向 R_{bnd}	3	`xmax`	`model`
境界の位置 z 方向 Z_{bnd}	3	`zmax`	`model`
比熱比 γ	5/3	`gm`	`model`
重力ポテンシャルの境界半径 s_{g0}	0.2	`sseps`	`model`
円柱角運動量分布指数 a	0	`aa`	`model`
円柱ポリトロープ指数 n	3	`rn`	`model`
円柱温度 E_{th}	0.05	`eth`	`model`
コロナ温度 T_{c0}	1	`tec0`	`model`
コロナ密度 ρ_{c0}	10^{-3}	`roc0`	`model`
一様磁場強度 E_{mg}	0.002	`emg`	`model`
擾乱の波長 λ	3/4	`rlambda`	`model`

表 2: おもなパラメータ

境界条件は、以下の通り。サブルーチン `bnd` で設定。$z = 0$、$z = Z_{\mathrm{bnd}}$ で周期境界条件。$r = 0$ で、 対称境界条件。すなわち V_r、V_ϕ、B_r、B_ϕ は「絶対値が等しく符号反転で鏡面配置」、ρ、p、V_z、B_z は「絶対値・符号が等しく鏡面配置」。$r = R_{\mathrm{bnd}}$ で、自由境界条件。すなわち、すべての物理量の r 方向微分がゼロ。

計算パラメータは以下の通り（表 3 参照）。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
グリッド数 r 方向	103	`ix`	`main`
グリッド数 z 方向	103	`jx`	`main`
マージン	4	`margin`	`main`
終了時刻	10	`tend`	`main`
出力時間間隔	0.5	`dtout`	`main`
CFL 数	0.4	`safety`	`main`
進行時刻下限値	10^{-10}	`dtmin`	`main`

表 3: おもな数値計算パラメータ。マージンとは、境界の値を格納するための配列の「そで」部分の幅のこと。進行時刻下限値とは、各計算ステップの Δt の値がこの値を下回ったときに計算を強制終了するための臨界値。

5 参考文献

Abramowicz, Jaroszynski & Sikora, 1978, A&Ap, **63**, 221
Kudoh, Matsumoto & Shibata, 1998, ApJ, **508**, 186