CANS2D モデルパッケージ md_mhdgwave

MHD 重力波

2006. 1. 9.

1　はじめに

このモデルパッケージは、2 次元平面内での MHD 線形重力波の伝播を解くためのものである。基本的には、Shibata (1983) の計算に倣っている。

2　仮定と基礎方程式

流体は非粘性・圧縮性・磁気拡散なし磁気流体とする。計算領域は 2 次元デカルト座標（xy 平面）で $\partial/\partial z = 0$、$V_z = 0$、$B_z = 0$ と仮定する。一様重力が y 方向下向きにかかっているとする。解くのは、密度 ρ、圧力 p、速度 V_x、V_y、磁場 B_x、B_y についての 2 次元 Euler 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}\right) = \rho g_x \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_y^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_y^2}{4\pi}\right) = \rho g_y \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_x) + \frac{\partial}{\partial y}(E_z) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y) - \frac{\partial}{\partial x}(E_z) = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{B^2}{8\pi}\right) &+ \frac{\partial}{\partial x}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_x - \frac{B_y E_z}{4\pi}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_y + \frac{B_x E_z}{4\pi}\right) = \rho g_x V_x + \rho g_y V_y\end{aligned} \tag{6}$$

$$E_z = -V_x B_y + V_y B_x \tag{7}$$

である。ここで、γ は比熱比。

3　無次元化

計算コードの中では、変数は以下のように無次元化して扱われる（表 1 参照）。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ H_0、$C_{\rm S0}$、$H_0/C_{\rm S0}$。ここで、H_0 は初期一様状態の圧力スケール長、$C_{\rm S0}$ は初期一様状態の音速。密度は $y = 0$ での値 ρ_0 で無次元化する。以下、無次元化した変数を使う。

変数	規格化単位
x, y	H_0
V_x, V_y	C_{S0}
t	H_0/C_{S0}
ρ	ρ_0
p	$\rho_0 C_{\mathrm{S0}}^2$
B_x, B_y	$\sqrt{\rho_0 C_{\mathrm{S0}}^2}$

表 1: 変数と規格化単位

4 パラメータ・初期条件・計算条件・境界条件

$0 < x < X_{\mathrm{bnd}}$、$Y_{\mathrm{min}} < y < Y_{\mathrm{max}}$ の領域を解く。初期状態は以下のようなもの。サブルーチン `model` で設定する。温度（音速）が一様であるとし、一様重力のもとでの力学平衡で圧力・密度分布を決める。さらに、磁場は、

$$B_x = 0$$

$$B_y = \sqrt{8\pi\alpha_0/\gamma}$$

とした。α_0 は初期プラズマベータの逆数。ここに擾乱を加える。

$$p = p_{\mathrm{equiv}} \left\{1 + a \exp\left[-(r/w)^2\right]\right\}$$

ただし、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ここで p_{equiv} は平衡状態の圧力分布、a は擾乱の振幅、w は擾乱の印加範囲。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
比熱比 γ	5/3	`gm`	`model`
初期プラズマベータの逆数 α_0	0.05	`betai`	`model`
擾乱の振幅 a	0.5	`amp`	`model`
擾乱の印加範囲 w	0.2	`wexp`	`model`

表 2: おもなパラメータ

境界条件は、x 境界では対称境界。y 境界では、密度・圧力については微分外挿境界、速度の境界に平行な成分と磁場とは自由境界、速度の境界に垂直な成分は対称境界。サブルーチン `bnd` で設定する。

計算パラメータは以下の通り（表 3 参照）。

5 参考文献

Shibata, K., 1983, PASJ, **35**, 263-284.

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
グリッド数 x 方向	108	`ix`	`main`
グリッド数 y 方向	108	`jx`	`main`
マージン	4	`margin`	`main`
終了時刻	7	`tend`	`main`
出力時間間隔	0.5	`dtout`	`main`
CFL 数	0.4	`safety`	`main`
進行時刻下限値	10^{-10}	`dtmin`	`main`

表 3: おもな数値計算パラメータ。マージンとは、境界の値を格納するための配列の「そで」部分の幅のこと。進行時刻下限値とは、各計算ステップの Δt の値がこの値を下回ったときに計算を強制終了するための臨界値。