CANS2D モデルパッケージ md_parker

Parker 不安定

2006. 1. 11.

1　はじめに

このモデルパッケージは、2 次元平面内での Parker 不安定を解くためのものである。

2　仮定と基礎方程式

流体は非粘性・圧縮性・磁気拡散なし磁気流体とする。計算領域は 2 次元デカルト座標（xy 平面）で $\partial/\partial z = 0$、$V_z = 0$、$B_z = 0$ と仮定する。重力がかかっているとする（関数形は後述)。解くのは、 密度 ρ、圧力 p、速度 V_x、V_y、磁場 B_x、B_y についての 2 次元 MHD 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}\right) = \rho g_x \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_y^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_y^2}{4\pi}\right) = \rho g_y \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_x) + \frac{\partial}{\partial y}(E_z) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y) - \frac{\partial}{\partial x}(E_z) = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{B^2}{8\pi}\right) &+ \frac{\partial}{\partial x}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_x - \frac{B_y E_z}{4\pi}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left((\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_y + \frac{B_x E_z}{4\pi}\right) = \rho g_x V_x + \rho g_y V_y\end{aligned} \tag{6}$$

$$E_z = -V_x B_y + V_y B_x \tag{7}$$

である。ここで、γ は比熱比。

3　無次元化

計算コードの中では、変数は以下のように無次元化して扱われる（表 1 参照)。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ H_0、 C_{S0}、H_0/C_{S0}。ここで、H_0 は初期円盤内（後述）の圧力スケール長、C_{S0} は初期円盤内の音速。密度は $y = 0$ での値 ρ_0 で無次元化する。以下、無次元化した変数を使う。

変数	規格化単位
$x,\ y$	H_0
$V_x,\ V_y$	$C_{\rm S0}$
t	$H_0/C_{\rm S0}$
ρ	ρ_0
p	$\rho_0 C_{\rm S0}^2$
$B_x,\ B_y$	$\sqrt{\rho_0 C_{\rm S0}^2}$
T	$C_{\rm S0}^2/(\gamma k_{\rm B}/m)$

表 1: 変数と規格化単位。$k_{\rm B}$ は Boltzmann 定数、m は平均粒子質量

4 パラメータ・初期条件・計算条件・境界条件

$|x| < X_{\rm bnd}$、$|y| < Y_{\rm bnd}$ の領域を解く。初期状態は以下のようなもの。サブルーチン `model` で設定する。ガスは、円盤部（低温ガス）とコロナ部（高温ガス）とからなる。次のような重力・温度・プラズマベータ分布のもとでの力学平衡で圧力分布を決める。

$$g_x = 0, \quad g_y = -\frac{1}{\gamma}\tanh\left(y/w_g\right)$$

これは、y 方向一様な強さの重力が、$y=0$ の面に垂直に分布していることを示す。

$$T = 1 + \frac{1}{2}(T_{\rm cor}-1)\left[\tanh\left(\frac{|y|-y_{\rm tr}}{w_{\rm tr}}\right)+1\right]$$

これは、$|y| < y_{\rm tr}$ に低温ガス（$T=1$）、$|y| > y_{\rm tr}$ に高温ガス（$T=T_{\rm cor}$）が分布していることを表す。

$$\alpha = \left|\alpha_0 \frac{1}{2}\left[\tanh\frac{y-y_{\rm f1}}{w_f}+1\right]\frac{1}{2}\left[\tanh\frac{y-y_{\rm f2}}{w_f}+1\right]\right|$$

これは、プラズマベータが $1/\alpha_0$ であるような磁束シートが $y_{\rm f1} < y < y_{\rm f2}$ に分布していることを表す。これらの条件のもと、密度・圧力分布は次の式を解くことで求める。

$$\frac{d}{dy}[(1+\alpha)p] = \rho g_y$$

$$p = \rho T/\gamma$$

また、磁場は x 成分のみとし

$$B_x = \sqrt{8\pi p \alpha}$$

$$B_y = 0$$

とする。この初期状態に以下のような速度擾乱を加える。

$$V_x = 0$$

$$V_y = a\cos\left(2\pi x/\lambda_p\right)\frac{1}{2}\left[\tanh\frac{x+3\lambda_p/4}{w_p} - \tanh\frac{x-3\lambda_p/4}{w_p}\right]\frac{1}{2}\left[\tanh\frac{y-y_{p1}}{w_p} - \tanh\frac{y-y_{p2}}{w_p}\right]$$

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
境界の位置 x 方向 $X_{\rm bnd}$	50	`xmax`	`model`
境界の位置 y 方向 $Y_{\rm bnd}$	25	`ymax`	`model`
比熱比 γ	5/3	`gm`	`model`
高温ガスの温度 $T_{\rm cor}$	25	`tcor`	`model`
低温高温ガスの境界 $y_{\rm tr}$	6	`ytr`	`model`
初期プラズマベータの逆数 α_0	5	`rbetaf`	`model`
磁束シートの範囲 y_{f1}、y_{f2}	-2.5、2.5	`yf1`、`yf2`	`model`
擾乱の振幅 a	0.1	`amp`	`pertub`
擾乱の x 方向の波長・印加範囲 λ_p	20	`xptb`	`pertub`
擾乱の y 方向の印加範囲 y_{p1}、y_{p2}	-4、4	`yptb1`、`yptb2`	`pertub`

表 2: おもなパラメータ

以上の式に現れた $w_{\rm tr}$、w_f、w_g、w_p は数値的な振動を防ぐための遷移幅でいずれも 0.5 にとっている。

境界条件は、x 境界では周期境界。y 境界では、対称境界、すなわち V_y、B_y は「絶対値が等しく符号反転で鏡面配置」、ρ、p、V_x、B_x は「絶対値・符号が等しく鏡面配置」。サブルーチン `bnd` で設定する。

計算パラメータは以下の通り（表 3 参照）。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
グリッド数 x 方向	83	`ix`	`main`
グリッド数 y 方向	123	`jx`	`main`
マージン	4	`margin`	`main`
終了時刻	60	`tend`	`main`
出力時間間隔	2	`dtout`	`main`
CFL 数	0.4	`safety`	`main`
進行時刻下限値	10^{-10}	`dtmin`	`main`

表 3: おもな数値計算パラメータ。マージンとは、境界の値を格納するための配列の「そで」部分の幅のこと。進行時刻下限値とは、各計算ステップの Δt の値がこの値を下回ったときに計算を強制終了するための臨界値。

5 参考文献