CANS2D モデルパッケージ md_kh

Kelvin-Helmholtz 不安定性

2006. 2. 12.

1 はじめに

このモデルパッケージは Kelvin-Helmholtz 不安定性をシミュレーションするためのものである。Kelvin-Helmholtz 不安定性は、速度の異なる不連続面に生じる不安定性である。例えば、木星に観測される大赤斑などの渦上の模様はこの不安定性によって形成されていると考えられている。

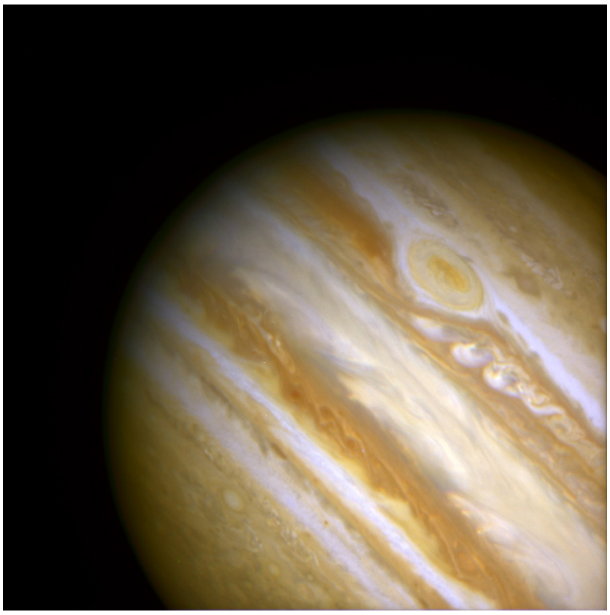

図 1: 木星の大赤斑 (HST Homepage より)

2 仮定と基礎方程式

流体は非粘性・圧縮性流体とする。計算領域は 2 次元デカルト座標（xy 平面）で $\partial/\partial z = 0$、$V_z = 0$ と仮定する。解くのは、 密度 ρ、圧力 p、速度 V_x、V_y についての 2 次元 Euler 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_x V_y) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y^2 + p) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho V^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{1}{2}\rho V^2\right) V_x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{1}{2}\rho V^2\right) V_y\right] = 0 \tag{4}$$

である。ここで、γ は比熱比。

3 無次元化

計算コードの中では、変数は以下のように無次元化して扱われる（表 1 参照）。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ L_0、 C_{S0}、L_0/C_{S0}。ここで、L_0 は計算領域の大きさ、C_{S0} は下半分領域（$y < 0$）初期状態の音速。密度は下半分領域初期状態の値 ρ_0 で無次元化する。以下、無次元化した変数を使う。

変数	規格化単位
x, y	L_0
V_x, V_y	C_{S0}
t	L_0/C_{S0}
ρ	ρ_0
p	$\rho_0 C_{\mathrm{S0}}^2$

表 1: 変数と規格化単位。ρ_0、C_{S0} は下半分初期状態の値。

4 パラメータ・初期条件・計算条件・境界条件

$|x| < 1/2$、$|y| < 1/2$ の領域を解く。初期条件はサブルーチン `model` で設定する。$y = 0$ の面を境に密度や速度が不連続であるとする。（数値上の安定性のために実際は tanh 関数で接続している。）$y < 0$ の領域では、

$$\rho = 1$$

$$p = 1/\gamma$$

$$V_x = 0$$

$$V_y = 0$$

とし、$y > 0$ の領域では、

$$\rho = \rho_1$$

$$p = 1/\gamma$$

$$V_x = V_1$$

$$V_y = 0$$

とする。これに、ゆらぎ (振幅 a、波数 k) を速度・圧力に加える。ただしゆらぎの空間分布は、「非圧縮流体の場合の」線形解析の固有関数（Chandrasekhar 1961）を与えている。この初期揺らぎとして乱数擾乱を与えることもできる。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
比熱比 γ	5/3	`gm`	`model`
上半分領域の密度 ρ_1	0.25	`ro1`	`model`
上半分領域の速度 V_1	0.5	`u1`	`model`
上下領域境界の幅	0.01	`wtr`	`model`
擾乱の振幅 a	0.1	`amp`	`model`
擾乱の波長 λ	1/2	`rlambda`	`model`

表 2: おもなパラメータ

境界条件として、x 方向は周期境界とし、y 方向は対称境界とする。サブルーチン `bnd` で設定する。

計算パラメータは以下の通り（表 3 参照)。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
グリッド数 x 方向	103	`ix`	`main`
グリッド数 y 方向	102	`jx`	`main`
マージン	4	`margin`	`main`
終了時刻	2	`tend`	`main`
出力時間間隔	0.2	`dtout`	`main`
CFL 数	0.4	`safety`	`main`
進行時刻下限値	10^{-10}	`dtmin`	`main`

表 3: おもな数値計算パラメータ。マージンとは、境界の値を格納するための配列の「そで」部分の幅のこと。進行時刻下限値とは、各計算ステップの Δt の値がこの値を下回ったときに計算を強制終了するための臨界値。

5 厳密解：不安定性の成長率について

不安定性の分散関係式は線形解析により一般に

$$\omega = k(\alpha_0 V_0 + \alpha_1 V_1) + \sqrt{-k^2 \alpha_0 \alpha_1 (V_0 - V_1)^2}$$

と与えられる。ここで、ω は振動数、k は波数である。また、

$$\alpha_0 = \frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho_1}, \quad \alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_0 + \rho_1}$$

である。式の導出について詳しくは Chandrasekhar（1961）を参照されたい。

6　計算結果

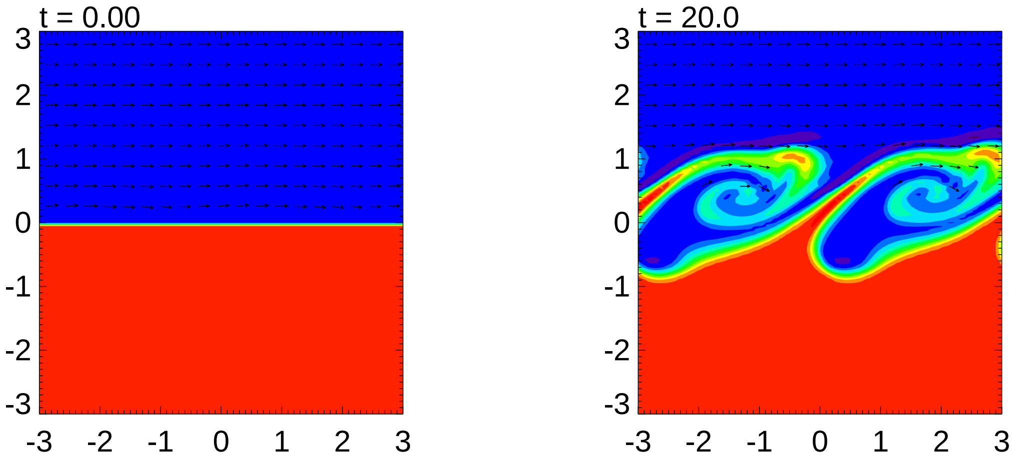

図 2: 色は密度を表す。左の図は初期状態。右の図は $t = 20$ の状態。

7　参考文献

坂下・池内, 1996,「宇宙流体力学」

Chandrasekhar, 1961, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability"