CANS2D モデルパッケージ md_mhd3shktb

MHD 衝撃波 2.5 次元版

2006. 1. 12.

1 はじめに

このモデルパッケージは、2 次元平面内での MHD 衝撃波問題を解くためのものである。

2 仮定と基礎方程式

流体は非粘性・圧縮性流体とする。計算領域は 2 次元デカルト座標（xy 平面）で $\partial/\partial z = 0$ と仮定する。解くのは、 密度 ρ、圧力 p、速度 V_x、V_y、V_z 磁場 B_x、B_y、B_z についての 2 次元 MHD 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_y^2 + p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_y^2}{4\pi}\right) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x V_z - \frac{B_x B_z}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_y V_z - \frac{B_y B_z}{4\pi}\right) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_x) + \frac{\partial}{\partial y}(cE_z) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y) - \frac{\partial}{\partial x}(cE_z) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_z) + \frac{\partial}{\partial x}(cE_y) - \frac{\partial}{\partial y}(cE_x) = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{B^2}{8\pi}\right) &+ \frac{\partial}{\partial x}\left[(\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_x + c\frac{B_z E_y - B_y E_z}{4\pi}\right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left[(\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_y + c\frac{B_x E_z - B_z E_x}{4\pi}\right] = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$$cE_x = -V_y B_z + V_z B_y, \quad cE_y = -V_z B_x + V_x B_z, \quad cE_z = -V_x B_y + V_y B_x \tag{9}$$

である。ここで、γ は比熱比。

変数	規格化単位
x, y	L_0
V_x, V_y	$C_{\mathrm{S}0}$
t	$L_0/C_{\mathrm{S}0}$
ρ	ρ_0
p	$\rho_0 C_{\mathrm{S}0}^2$
B_x, B_y, B_z	$\sqrt{8\pi\rho_0 C_{\mathrm{S}0}^2}$

表 1: 変数と規格化単位

3 無次元化

計算コードの中では、変数は以下のように無次元化して扱われる（表 1 参照)。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ L_0、 $C_{\mathrm{S}0}$、$L_0/C_{\mathrm{S}0}$。ここで、L_0 は計算領域の大きさ、$C_{\mathrm{S}0}$ は高圧側の音速の $\gamma^{-1/2}$ 倍。密度は高圧側の値 ρ_0 で無次元化する。以下、無次元化した変数を使う。

4 パラメータ・初期条件・計算条件・境界条件

$|x| < 1/2$、$|y| < 1/2$ の領域を解く。初期状態は以下のようなもの。サブルーチン `model` で設定する。

$$\rho = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)\frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{s}{w}\right)\right]$$

$$p = p_0 + (p_1 - p_0)\frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{s}{w}\right)\right]$$

$$V_x = V_y = 0$$

$$B_x = B_{00}\cos\theta_i, \quad B_y = B_{00}\sin\theta_i$$

$$B_z = B_{z0} + (B_{z1} - B_{z0})\frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{s}{w}\right)\right]$$

ただし、

$$s = x\cos\theta_i + y\sin\theta_i$$

$w = 0.02$ は数値不安定を避けるための遷移幅。

境界条件は、すべて自由境界条件。サブルーチン `bnd` で設定する。

計算パラメータは以下の通り（表 3 参照)。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
比熱比 γ	2	`gm`	`model`
高圧側圧力 p_0	1	`pr0`	`model`
高圧側密度 ρ_0	1	`ro0`	`model`
高圧側磁場 B_{z0}	1	`bz0`	`model`
低圧側圧力 p_1	0.1	`pr1`	`model`
低圧側密度 ρ_1	0.125	`ro1`	`model`
低圧側磁場 B_{z1}	-1	`bz1`	`model`
初期不連続の角度 θ_i	60 度	`thini`	`model`
初期不連続に垂直な磁場 B_{00}	0.75	`b00`	`model`

表 2: おもなパラメータ

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
グリッド数 x 方向	107	`ix`	`main`
グリッド数 y 方向	107	`jx`	`main`
マージン	4	`margin`	`main`
終了時刻	0.1	`tend`	`main`
出力時間間隔	0.02	`dtout`	`main`
CFL 数	0.4	`safety`	`main`
進行時刻下限値	10^{-10}	`dtmin`	`main`

表 3: おもな数値計算パラメータ。マージンとは、境界の値を格納するための配列の「そで」部分の幅のこと。進行時刻下限値とは、各計算ステップの Δt の値がこの値を下回ったときに計算を強制終了するための臨界値。