CANS2D モデルパッケージ md_rt

Rayleigh-Taylor 不安定性

2006. 1. 6.

1 はじめに

このモデルパッケージは Rayleigh-Taylor 不安定性をシミュレーションするためのものである。Rayleigh-Taylor 不安定性は、重い流体が軽い流体の上にあるとき、重力によって対流が生じる不安定性である。密度の異なる 2 種類の流体が加速度運動する系も同様の状況下にあり、不安定性が生じる。天体では、超新星爆発で膨張するシェルなどでおこっていると考えられる。

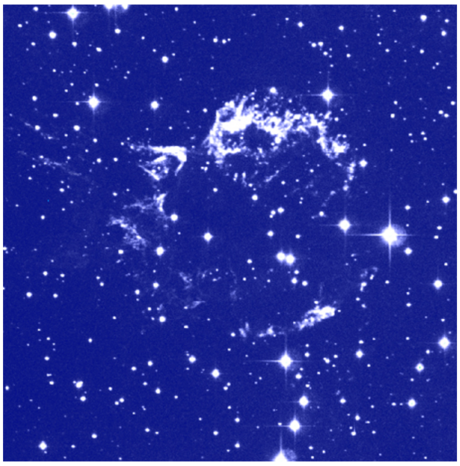

図 1: 超新星残骸 (MDM 天文台光学望遠鏡による)

2 仮定と基礎方程式

流体は非粘性・圧縮性流体とする。計算領域は 2 次元デカルト座標（xy 平面）で $\partial/\partial z = 0$、$V_z = 0$ と仮定する。重力が y 方向に一様にかかっているとする。解くのは、 密度 ρ、圧力 p、速度 V_x、V_y についての 2 次元 Euler 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}\rho V_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho V_y = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x^2 + p\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_x V_y) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_y^2 + p\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_y) = \rho g_y \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho\left(V_x^2+V_y^2\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left\{\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\frac{1}{2}\rho\left(V_x^2+V_y^2\right)\right\}V_x\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left\{\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\frac{1}{2}\rho\left(V_x^2+V_y^2\right)\right\}V_x\right]=\rho g_y V_y \tag{4}$$

である。ここで、γ は比熱比。g_y=定数は重力加速度。

3　無次元化

計算コードの中では、変数は以下のように無次元化して扱われる（表 1 参照)。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ L_0、 C_{S0}、L_0/C_{S0}。ここで、L_0 は計算領域の大きさ、C_{S0} は計算領域上境界での音速。密度は上半分領域初期状態の値 ρ_0 で無次元化する。以下、無次元化した変数を使う。

変数	規格化単位
x, y	L_0
V_x, V_y	C_{S0}
t	L_0/C_{S0}
ρ	ρ_0
p	$\rho_0 C_{\mathrm{S0}}^2$

表 1: 変数と規格化単位

4　パラメータ・初期条件・計算条件・境界条件

$|x|<X_{\mathrm{bnd}}$、$|y|<Y_{\mathrm{bnd}}$ の領域を解く。初期条件はサブルーチン `model` で設定する。$y=0$ の面を境に密度や速度が不連続であるとする。(数値上の安定性のために実際は tanh 関数で接続している。）また、静水圧平衡状態であるとする（$V_x=V_y=0$)。$y>0$ の領域では、

$$\rho=\rho_1$$

とし、$y<0$ の領域では、

$$\rho=\rho_0$$

とし、それぞれ一様とする。圧力分布については、y 方向の静水圧平衡から決める。つまり、境界 ($y=Y_{\mathrm{bnd}}$) での圧力を p_0 とすると、圧力分布は

$$p(y)=p_0+\int_{Y_{\mathrm{bnd}}}^{y}\rho(y)g_y\,dy$$

とあたえられる。これに、ゆらぎ (振幅 a、波数 k) を速度・圧力に加える。ただしゆらぎの空間分布は、線形解析の固有関数（Chandrasekhar 1961）を与える。この初期揺らぎとして乱数擾乱を与えることもできる。

境界条件として、x 方向は周期境界とし、y 方向は対称境界とする。サブルーチン `bnd` で設定する。

計算パラメータは以下の通り（表 3 参照)。

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
比熱比 γ	$5/3$	gm	model
重力加速度 g_y	$-1/\gamma$	g0	model
上半分領域の密度 ρ_1	4	ro1	model
上下領域境界の幅	0.1	wtr	model
擾乱の振幅 a	0.01	amp	model
擾乱の波長 λ	1/2	rlambda	model

表 2: おもなパラメータ

パラメータ	値	コード中での変数名	設定サブルーチン名
境界の位置 x 方向 $X_{\rm bnd}$	1/2	—	model
境界の位置 x 方向 $Y_{\rm bnd}$	1/2	—	model
グリッド数 x 方向	108	ix	main
グリッド数 y 方向	102	jx	main
マージン	4	margin	main
終了時刻	3	tend	main
出力時間間隔	0.3	dtout	main
CFL 数	0.1	safety	main
進行時刻下限値	10^{-10}	dtmin	main

表 3: おもな数値計算パラメータ。マージンとは、境界の値を格納するための配列の「そで」部分の幅のこと。進行時刻下限値とは、各計算ステップの Δt の値がこの値を下回ったときに計算を強制終了するための臨界値。

5　厳密解：不安定性の成長率について

不安定性の成長率は線形解析により一般に

$$\omega = \sqrt{gk(\alpha_1 - \alpha_0)}$$

と与えられる。ここで、ω は振動数、k は波数である。また、

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_0},\ \alpha_0 = \frac{\rho_0}{\rho_1+\rho_0}$$

である。式の導出について詳しくは Chandrasekhar（1961）を参照されたい。

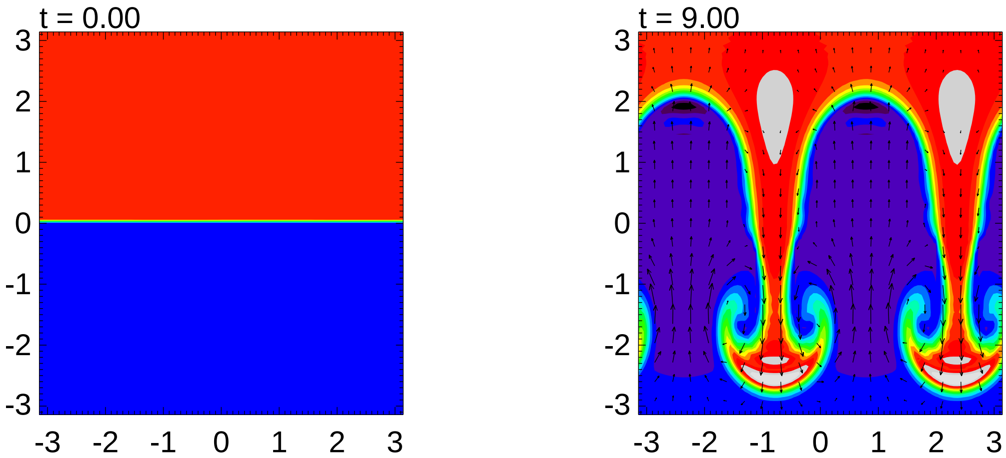

図 2: 色は密度を表す。左の図は初期状態。右の図は $t = 20$ の状態。

6 計算結果

7 参考文献

坂下・池内, 1996,「宇宙流体力学」

Chandrasekhar, 1961, ”Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability”