物理学基礎論B-小テスト

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成 25 年 12 月 11 日

1 電場、静電ポテンシャル、電荷の分布

以下に電場 $\boldsymbol{E}$、静電ポテンシャル ϕ、電荷の分布の何れかが与えられている。与えられた物理量を元に、ある任意の点での他の 2 つの物理量を指定された方法にて求めよ。ただしここでは、静電ポテンシャルは無限遠にてゼロであるものとし、また r は原点からある点への距離 (直交座標系 (x, y, z) においては $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) である。なお ϕ_0、ρ_0、λ、R は定数である。

1. $\phi(r) = \begin{cases} \phi_0 & \text{for } r < R \\ \phi_0 R/r & \text{for } r \geq R \end{cases}$
   静電ポテンシャルの勾配を用いて電場を、ポアソン方程式を用いて電荷密度を求めよ。

公式より電場 $\boldsymbol{E}$ は
$r < R$ において

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \phi = -\hat{\boldsymbol{r}} \frac{\partial}{\partial r} \phi_0 = \boldsymbol{0}$$

$r < R$ において

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \phi = -\hat{\boldsymbol{r}} \phi_0 R \frac{\partial}{\partial r} r^{-1} = \hat{\boldsymbol{r}} \frac{\phi_0 R}{r^2}$$

単位体積あたりの電荷密度 ρ はポアソンの方程式より、
$r < R$ において

$$\rho = -\varepsilon_0 \nabla^2 \phi = -\varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi_0 \right) = 0$$

$r > R$ において

$$\rho = -\varepsilon_0 \nabla^2 \phi = -\varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\phi_0 R}{r} \right) = 0$$

また $r = R$ における静電ポテンシャルの一次係数の不連続性はポアソンの方程式より

$$\lim_{\Delta \to 0} \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{r=R-\Delta}^{R+\Delta} = -\frac{1}{R^2} \int_{r=R-\Delta}^{R+\Delta} r^2 \rho \, dr$$

であるが、左辺 (LHS) は

$$\text{LHS} = \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{\phi_0 R}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \phi_0 \right]_{r=R} = -\frac{\phi_0}{R} \neq 0$$

であるので、ρ は $r = R$ で無限大になるデルタ関数で無ければならない。よって $\rho = \alpha \delta(r - R)$($\alpha$ は定数) と置くと、(両辺に-1 を掛け)

$$\frac{\phi_0}{R} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{R^2} \int_{r=R-\Delta}^{R+\Delta} r^2 \alpha \delta(r - R) \, dr = \alpha$$

よって単位体積あたりの電荷密度は

$$\rho(r) = \frac{\phi_0}{R} \delta(r - R)$$

または、電荷面密度 σ になおして、

$$\sigma = \frac{\phi_0}{R}$$

2. 単位長さの電荷密度が一定で λ である無限に長い直線。電場をガウスの法則とクーロンの法則をそれぞれ用いて求め、ガウスの法則の値とクーロンの法則の値が一致する事を示せ。

この直線を中心とする半径 r、長さ L の円柱の閉曲面 S について考える。電場 $\boldsymbol{E}$ は常にこの直線に垂直であるので、電場 $\boldsymbol{E}$ の大きさはガウスの法則より、

$$\begin{aligned}\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\hat{\boldsymbol{s}} &= \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}\\ E\,4\pi rL &= \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}\\ E &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\end{aligned}$$

クーロンの法則を用いた場合、距離 r にある点においては直線上 z の距離にある極小線分がもたらす電場の直線と平行な成分は対称性により打ち消しあうので、直線に垂直な成分のみ積分して、

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda r}{(r^2+z^2)^{3/2}}dz\\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}2\int_{z=0}^{\infty}\frac{dz}{(1+z^2/r^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

$z/r=\tan\theta$ とおくと、$dz=rd\theta/\cos^2\theta$、$z\to 0$ において $\theta\to 0$、$z\to\infty$ において $\theta\to\pi/2$ なので、

$$\begin{aligned}E &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{rd\theta}{\cos^2\theta(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos\theta d\theta\\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\end{aligned}$$

よってガウスの法則による結果とクーロンの法則による結果は一致する。

3. 単位面積あたりの電荷密度が一定で ρ_0 である半径 R の無限に長い円柱がある。円柱の中心からの距離 l における電場と静電ポテンシャルをガウスの法則を用いて求めよ。

はじめに：「単位体積あたり」での出題が、「単位面積あたり」になっていました。また、テスト中に $l=R$ にてポテンシャルをゼロにせよと修正しました。下記には面密度の場合と体積密度の場合、両方示します。どちらで解いていても正解とします。

ρ_0 が面密度の場合。

半径 l、長さ L の与えられている円柱と中心を同じくする円柱の閉曲面 S について考える。対称性より電場は全て円柱の半径方向に放射状に広がっている。
$l<R$ において、閉曲面内に電荷は存在しないので、ガウスの法則より

$$\begin{aligned}\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\hat{\boldsymbol{s}} &= \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \;=\; 0\\ E &= 0\end{aligned}$$

$l>R$ において、閉曲面内に存在する電荷は
$Q_{enc}=\rho_0\,2\pi RL$ なので、

$$\begin{aligned}\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\hat{\boldsymbol{s}} &= \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}\\ E\,2\pi lL &= \frac{\rho_0\,2\pi RL}{\varepsilon_0}\\ E &= \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0 l}\end{aligned}$$

これらを積分し、$l=R$ にて $\phi=0$ を基準とすると、
$l<R$ において、

$$\phi = -\int_{r=R}^{l}\boldsymbol{E}\cdot d\hat{\boldsymbol{r}} \;=\; 0$$

$l>R$ において、

$$\begin{aligned}\phi &= -\int_{r=R}^{l}\boldsymbol{E}\cdot d\hat{\boldsymbol{r}}\\ &= -\int_{r=R}^{l}\frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0 r}dr\\ &= -\frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}[\ln r]_R^l\\ &= -\frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}\ln(r/R)\end{aligned}$$

ρ_0 が体積密度の場合。

半径 l、長さ L の与えられている円柱と中心を同じくする円柱の閉曲面 S について考える。対称性より電場は全て円柱の半径方向に放射状に広がっている。
$l < R$ において、閉曲面内にある電荷は
$Q_{enc} = \rho_0\, \pi l^2 L$ なので、ガウスの法則より

$$\begin{aligned} \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\hat{\boldsymbol{s}} &= \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \\ E\, 2\pi l L &= \frac{\rho_0\, \pi l^2 L}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{\rho_0 l}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$l > R$ において、閉曲面内に存在する電荷は
$Q_{enc} = \rho_0\, \pi R^2 L$ なので、ガウスの法則より

$$\begin{aligned} \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\hat{\boldsymbol{s}} &= \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \\ E\, 2\pi l L &= \frac{\rho_0\, \pi R^2 L}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 l} \end{aligned}$$

これらを積分し、$l = R$ にて $\phi = 0$ を基準とすると、
$l < R$ において、

$$\begin{aligned} \phi &= -\int_{r=R}^{l} \boldsymbol{E} \cdot d\hat{\boldsymbol{r}} \\ &= -\int_{r=R}^{l} \frac{\rho_0 r}{\varepsilon_0} dr \\ &= -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} \right]_R^l \\ &= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} (R^2 - l^2) \end{aligned}$$

$l > R$ において、

$$\begin{aligned} \phi &= -\int_{r=R}^{l} \boldsymbol{E} \cdot d\hat{\boldsymbol{r}} \\ &= -\int_{r=R}^{l} \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r} dr \\ &= -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} [\ln r]_R^l \\ &= -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} \ln(r/R) \end{aligned}$$

4. 単位面積あたりの電荷密度が一定で ρ_0 である半径 R の球がある。球の中心からの距離 l における電場と静電ポテンシャルをガウスの法則を用いて求めよ。

   はじめに：テスト中に「単位面積」を「単位体積」に修正しました。

$l < R$ において、閉曲面内にある電荷は
$Q_{enc} = \rho_0\, 4\pi l^3/3$ なので、ガウスの法則より

$$\begin{aligned} \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\hat{\boldsymbol{s}} &= \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \\ E\, 4\pi l^2 &= \frac{\rho_0\, 4\pi l^3}{3\varepsilon_0} \\ E &= \frac{\rho_0 l}{3\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$l > R$ において、閉曲面内に存在する電荷は
$Q_{enc} = \rho_0\, 4\pi R^3/3$ なので、ガウスの法則より

$$\begin{aligned} \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\hat{\boldsymbol{s}} &= \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \\ E\, 4\pi l^2 &= \frac{\rho_0\, 4\pi R^3}{3\varepsilon_0} \\ E &= \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 l^2} \end{aligned}$$

これらを積分し、$l \to \infty$ にて $\phi \to 0$ を基準とすると、

$l > R$ において、

$$\begin{aligned} \phi &= -\int_{r=\infty}^{l} \boldsymbol{E} \cdot d\hat{\boldsymbol{r}} \\ &= -\int_{r=\infty}^{l} \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr \\ &= -\frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} [-r^{-1}]_\infty^l \\ &= \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 l} \end{aligned}$$

$l < R$ において、

$$\begin{aligned} \phi &= -\int_{r=\infty}^{l} \boldsymbol{E} \cdot d\hat{\boldsymbol{r}} \\ &= -\int_{r=R}^{l} \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} dr - \int_{r=\infty}^{R} \boldsymbol{E} \cdot d\hat{\boldsymbol{r}} \\ &= -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} \right]_R^l + \left[\frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} \right]_{r=R} \\ &= \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} (R^2 - l^2) + \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0} \\ &= \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} (3R^2 - l^2) \end{aligned}$$

2　導体

電荷 Q の点電荷を中心として内側の半径 a、外側の半径が b である導体の殻が存在する。導体の総電荷量がゼロである時、導体の内側と外側それぞれの電荷の面密度と、中心の点電荷から任意の距離 r の静電ポテンシャルを求めよ。

導体の内側と外側それぞれの電荷面密度を σ_a、σ_b とする。対称性より、電場は全て点電荷から放射状に広がっていることがわかる。
導体内の電場はゼロであるので、半径 r が $a < r < b$ である球状の閉曲面 S を考えると、ガウスの法則より

$$\begin{aligned}\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\hat{\boldsymbol{r}} &= \frac{Q_enc}{\varepsilon_0}\\ 0 &= \frac{1}{\varepsilon_0}(Q+\sigma_a\,4\pi a^2)\\ \sigma_a &= -\frac{Q}{4\pi a^2}\end{aligned}$$

また導体の総電荷量はゼロであるので、

$$\begin{aligned}\sigma_a\,4\pi a^2+\sigma_b\,4\pi b^2 &= 0\\ \sigma_b &= -\sigma_a\frac{a^2}{b^2} = \frac{Q}{4\pi b^2}\end{aligned}$$

以上より、半径 r の球状の閉曲面を考えると、その内側にある電荷の量 Q_{enc} は

$$Q_{enc} = \begin{cases} Q & \text{for } r<a\\ 0 & \text{for } a\le r<b\\ Q & \text{for } b\le r\end{cases}$$

であるので、ガウスの法則より電場を求めると、

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{for } r<a\\ \boldsymbol{0} & \text{for } a\le r<b\\ \hat{\boldsymbol{r}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{for } b\le r\end{cases}$$

よって $r\to\infty$ にて静電ポテンシャルをゼロとすると、電場を半径方向に積分して、
$b\le r$ において、

$$\begin{aligned}\phi &= -\int_{r'=\infty}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\hat{\boldsymbol{r}}'\\ &= -\int_{r'=\infty}^{r}\hat{\boldsymbol{r}}'\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\cot d\hat{\boldsymbol{r}}'\\ &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r'}\right]_{\infty}^{r}\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\end{aligned}$$

$a\le r<b$ において、

$$\begin{aligned}\phi &= -\int_{r'=\infty}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\hat{\boldsymbol{r}}'\\ &= -\int_{r'=b}^{r}\boldsymbol{0}\cdot d\hat{\boldsymbol{r}}' - \int_{r'=\infty}^{b}\boldsymbol{E}\cdot d\hat{\boldsymbol{r}}'\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\end{aligned}$$

$r<a$ において、

$$\begin{aligned}\phi &= -\int_{r'=\infty}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\hat{\boldsymbol{r}}'\\ &= -\int_{r'=a}^{r}\hat{\boldsymbol{r}}'\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\cot d\hat{\boldsymbol{r}}' - \int_{r'=\infty}^{a}\boldsymbol{E}\cdot d\hat{\boldsymbol{r}}'\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r'}\right]_a^r - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\end{aligned}$$

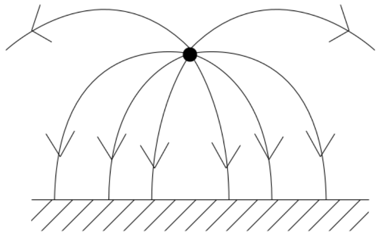
まとめると、原点から距離 r における静電ポテンシャル ϕ は

$$\phi = \begin{cases}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) & \text{for } r<a\\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} & \text{for } a\le r<b\\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{for } b\le r\end{cases}$$

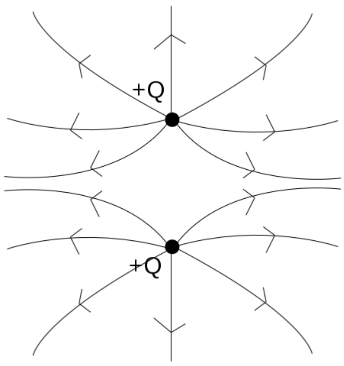
3　スケッチ

以下の系において電気力線を図示せよ。

1. 正の電荷 $+Q$ を持つ点電荷が無限に広い導体の板から少し離れた位置にある。



2. 同じ大きさの正の電荷 $+Q$ を持つ二つの点電荷がやや離れて存在する。



3. 四重極の電荷 (同じ大きさで正負の異なった電荷 $\pm Q$ が正方形の各頂点に存在する)。