物理学基礎論Bレポート2-解答

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成25年10月22日

1　数学

1.1　発散定理

問題文の「ベクトル場〜の、」の部分は「ベクトル場〜の発散の」にすべきでした。もしくは「体積積分」ではなく「表面積分」でした。出題文だと発散定理必要ないです。次回、発散のものを再度出題します。(TA)

発散定理を考慮に入れた上で、以下の値を求めよ。

1. ベクトル場 $\mathbf{A} = r^2\hat{\mathbf{r}}$ の、半径1で原点を中心とする球における体積積分

$$\begin{aligned}\int_V r^2\hat{\mathbf{r}}dV &= \hat{\mathbf{r}}\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\left[r^2\hat{\mathbf{r}}\,r^2\sin\theta\right]_{r=1}d\phi\,d\theta \\ &= \hat{\mathbf{r}}\int_{r=0}^{1}r^4\,dr\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_{\phi=0}^{\pi}d\phi \\ &= \frac{4\pi}{5}\hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

2. ベクトル場 $\mathbf{A} = y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}$ の、半径1で原点を中心とする球における体積積分

$$\begin{aligned}\int_V (y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}})\,dV &= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}(r\sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{x}} + r\sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{y}})\,r^2\sin\theta\,d\phi\,d\theta\,dr \\ &= \int_{r=0}^{1}r^3\,dr\int_{\theta=0}^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta\int_{\phi=0}^{2\pi}(\sin\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\hat{\mathbf{y}})\;d\phi \\ &\left|\int_{\phi=0}^{2\pi}\sin\phi\,d\phi = 0,\ \int_{\phi=0}^{2\pi}\cos\phi\,d\phi = 0\right. \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

3. ベクトル場 $\mathbf{A} = r^2\hat{\mathbf{r}}$ の、一辺2で原点を中心とする立方体における体積積分

$$\begin{aligned}\int_V r^2\hat{\mathbf{r}}\,dr &= \hat{\mathbf{r}}\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1}\left(x^2+y^2+z^2\right)\,dz\,dy\,dx \\ &= \hat{\mathbf{r}}\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-1}^{1}\right) \\ &= 2\hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

4. ベクトル場 $\mathbf{A} = xy\hat{\mathbf{x}} + xy\hat{\mathbf{y}}$ の、一辺2で原点を中心とする立方体における体積積分

$$\begin{aligned}\int_V (xy\hat{\mathbf{x}} + xy\hat{\mathbf{y}})\;dV &= (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1}xy\,dz\,dy\,dx \\ &\left|\int_{-1}^{1}x\,dx = 0\right. \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

5. ベクトル場 $\mathbf{A} = 1/r^2\hat{\mathbf{r}}$ の、半径 1 で原点を中心とする球における体積積分

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\,dV &= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\pi=0}^{2\pi}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\,r^2\sin\theta\,d\phi,d\theta\,dr \\ &= \hat{\mathbf{r}}\int_{r=0}^{1}dr\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_{\phi=0}^{2\pi}d\phi \\ &= 4\pi\hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

1.2　ディラックのデルタ関数

以下の値を求めよ。

1. 半径 2 で原点を中心とする球に関して、$\int_V xy\,\delta^3(x-1,y+1,z)\,dV$

$$\int_V xy\,\delta^3(x-1,y+1,z)\,dV = [xy]_{x=1,y=-1,z=0} = -1$$

2. 半径 2 で原点を中心とする球に関して、$\int_V xyz\,\delta^3(x-1,y+1,z)\,dV$

$$\int_V xy\,\delta^3(x-1,y+1,z)\,dV = [xyz]_{x=1,y=-1,z=0} = 0$$

3. 半径 R で原点を中心とする球に関して、$\int_V \delta(r-a)\,dV$ ただし $a < R$

$$\begin{aligned}\int_V \delta(r-a)\,dV &= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\delta(r-a)\,r^2\sin\theta\,d\phi\,d\theta\,dr \\ &= [r^2]_{r=a}\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_{\phi=0}^{\pi}d\phi \\ &= 4\pi a^2\end{aligned}$$

デルタ関数は r にのみ関係しているので、無限大の値が $r = a$ の球殻状に分布する。

2　点電荷

位置ベクトル $\mathbf{r}$ にある電荷 Q を持つ点電荷は電荷密度 $\rho = Q\delta(\mathbf{r})$ によって表される。$\mathbf{r} = \mathbf{0}$ として、ガウスの法則を用いてクーロンの法則を導出せよ。

（電場についての）ガウスの法則より、半径 R の原点を中心とする球の閉曲面を考えると

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V Q\delta^3(\mathbf{r})dV$$

ここで、$\mathbf{E}$ は閉曲面において常に等価で面に対し垂直であるので、

$$\begin{aligned}4\pi R^2 E &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\end{aligned}$$

3　一様な電荷を持つワイヤー

単位長さ辺り λ の一様な電荷を持つ無限に長いワイヤーから距離 a の位置の電場をガウスの法則を使って求めよ。

ワイヤーを軸とする半径 a、長さ L の円筒について考える。電荷の体積密度 ρ は電荷の線密度 λ とデルタ関数を使って $\rho(x,y,z) = lambda\delta^2(x,y)$ と書けるので、ガウスの法則より、

$$
\begin{aligned}
\oint_S \mathbf{E}\cdot d\hat{\mathbf{S}} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \lambda\delta^2(x,y)\,dV \\
&= \int_{x=-a}^{a}\int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{z=0}^{L}\lambda\delta(x)\delta(y)\,dz\,dy\,dx \\
&= \lambda L
\end{aligned}
$$

また左辺について、ワイヤーの対称性より E は常にワイヤーに垂直であるので、円筒の底の円形の面に対して E は常に平行である。故に円筒の側面と電場の内積のみが残り、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LHS} = 2\pi a L E &= \lambda L \\
E &= \frac{\lambda}{2\pi a}
\end{aligned}
$$

4　一様な電荷を持つ球

一定の電荷密度 ρ を持つ半径 R の球体の中心から距離 a の位置の電場をガウスの法則を使って求めよ。

半径 a の原点を中心とする球の閉曲面を考える。電荷密度は一定なので、閉曲面内の電荷の総量 Q はその体積に比例し、

$$
Q = \frac{4}{3}\pi\rho a^3
$$

また、電場は閉曲面において常に等価で面に対し垂直であるので、ガウスの法則より、

$$
\begin{aligned}
\oint_S \mathbf{E}\cdot d\hat{\mathbf{S}} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV \\
E\,4\pi a^2 &= \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho a^3 \\
E &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0 a}
\end{aligned}
$$

5　電場から電荷密度

これと次の問題はガウスの法則の微分形式

$$
\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}
$$

を使う。ρ は電荷密度であり、$\nabla\cdot E$ 一般的に

$$
\nabla\cdot E = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3E_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1E_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2E_3)\right\}
$$

であるが、各座標系においては以下の様になる。

- 直交座標系 $< u_1, u_2, u_3 >=< x, y, z >$、$h_1 = h_2 = h_3 = 1$、$< E_1, E_2, E_3 >=< E_x, E_y, E_z >$ から

$$
\nabla\cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}
$$

- 円柱座標系 $< u_1, u_2, u_3 >=< r, \theta, z >$、$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$、$< E_1, E_2, E_3 >=< E_r, E_\theta, E_z >$ から
$$\nabla \cdot E = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}E_\theta + \frac{\partial}{\partial z}E_z$$
- 球座標系 $< u_1, u_2, u_3 >=< r, \theta, \phi >$、$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$、$< E_1, E_2, E_3 >=< E_r, E_\theta, E_\phi >$ から
$$\nabla \cdot E = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}E_\phi$$

参照 M. R. Spiegel & J. Liu, Mathematical handbook of Formulas and Tables, Second edition, Schaum's outlines.

これより解答。

以下の電場が既知であるとき、任意の位置の電化密度を求めよ。

1. $\mathbf{E} = r^3\,\hat{\mathbf{r}}$
   ガウスの法則より、極座標を用いて
$$\begin{aligned}\rho &= \varepsilon_0 \nabla \cdot E \ = \ \varepsilon_0 \nabla \cdot (r^3 \hat{\mathbf{r}}) \\ &= \varepsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\, r^3) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{r^2}\, 5r^4 \ = \ 5\varepsilon_0 r^2\end{aligned}$$

2. $\mathbf{E} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + y^2\,\hat{\mathbf{y}}$ ガウスの法則より、直交座標系を用いて、
$$\begin{aligned}\rho &= \varepsilon_0 \nabla \cdot E \ = \ \varepsilon_0 \nabla \cdot (x^2 \hat{\mathbf{x}} + y^2 \hat{\mathbf{y}}) \\ &= \varepsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}x^2 + \frac{\partial}{\partial y}y^2 \right) \\ &= \varepsilon_0 (2x + 2y)\end{aligned}$$

6 電場から電荷

以下の電場が既知であるとき、次の空間内における電荷の総量を 2 通りの方法で求めよ。

2 通りとは $\nabla \cdot E$ を計算してから体積積分する方法と、表面の閉曲面で積分する方法である。

1. $\mathbf{E} = r^3\,\hat{\mathbf{r}}$、半径 1 の原点を中心とする球内において。
   方法 1
$$\begin{aligned}Q_{total} &= \varepsilon_0 \int_V \nabla \cdot (r^3 \hat{\mathbf{r}}) dV \\ &= \varepsilon_0 \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\, r^3)\, r^2 \sin\theta d\phi\, d\theta\, dr \\ &= \varepsilon_0 \int_{r=0}^{1} 5r^4\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \\ &= 4\pi\varepsilon_0 [r^5]_{r=0}^{1} \ = \ 4\pi\varepsilon_0\end{aligned}$$

   方法 2
$$\begin{aligned}Q_{total} &= \varepsilon_0 \int_S r^3\, \hat{\mathbf{r}} \cdot d\hat{\mathbf{S}} \\ &= \varepsilon_0 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} [r^3\, r^2 \sin\theta]_{r=1}\, d\phi\, d\theta \\ &= 4\pi\varepsilon_0\end{aligned}$$

2. $\mathbf{E} = xy^2z^2(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}})$、一辺 2 の原点を中心とする立方体において。

方法 1

$$
\begin{aligned}
Q_{total} &= \varepsilon_0 \int_V \nabla\cdot(xy^2z^2(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}))\,dV \\
&= \varepsilon_0 \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^2)+\frac{\partial}{\partial y}(xy^2z^2)+\frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^2)\right)dz\,dy\,dx \\
&= \varepsilon_0 \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1}(y^2z^2+2xyz^2+2xy\ 2z)dz\,dy\,dx \\
&\quad |\text{原点を中心にした奇関数の積分はゼロなので} \\
&= \varepsilon_0 \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1} y^2z^2dz\,dy\,dx \\
&= \frac{8}{9}\varepsilon_0
\end{aligned}
$$

方法 2

立方体の各面を $S(u=a)$ と表す。つまり $S(x=+1)$ とは $x=+1$ の面である。

$$
\begin{aligned}
Q_{total} &= \varepsilon_0 \int_S (xy^2z^2(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}))\cdot d\hat{\mathbf{S}} \\
&= \varepsilon_0 \left\{\int_{S(x=+1)} xy^2z^2dS - \int_{S(x=-1)} xy^2z^2dS + \int_{S(y=+1)} xy^2z^2dS\right. \\
&\quad \left. - \int_{S(y=-1)} xy^2z^2dS + \int_{S(z=+1)} xy^2z^2dS - \int_{S(z=-1)} xy^2z^2dS\right\} \\
&= \varepsilon_0 \left\{\int_{y=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1} y^2z^2dzdy + \int_{y=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1} y^2z^2dzdy + \int_{x=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1} xz^2dzdx\right. \\
&\quad \left. - \int_{x=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1} xz^2dzdx + \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1} xy^2dydx - \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1} xy^2dydx\right\} \\
&= 2\varepsilon_0 \int_{y=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1} y^2z^2dzdy \\
&= \frac{8}{9}\varepsilon_0
\end{aligned}
$$