物理学基礎論Bレポート04

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成25年11月26日

0.1 数学演習

以下の式 $F(\mathbf{u})$ の勾配 (gradient) を求めよ。ただし $\mathbf{u} =< x, y, z >$ は直交座標系を、$\mathbf{u} =< r, \theta, \phi >$ は球座標系を示す。

1. $F(x, y, z) = x$

$$\begin{aligned}\nabla x &= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) x \\ &= \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

2. $F(r, \theta, \phi) = r \sin\theta \cos\phi$

$$\begin{aligned}\nabla(r\sin\theta\cos\phi) &= \left(\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)(r\sin\theta\cos\phi) \\ &= \hat{\mathbf{r}}\sin\theta\cos\phi\frac{\partial r}{\partial r} + \hat{\theta}\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta + \hat{\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi \\ &= \hat{\mathbf{r}}\sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi\end{aligned}$$

3. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\begin{aligned}\nabla(x^2+y^2+z^2) &= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2+y^2+z^2) \\ &= 2x\hat{\mathbf{x}} + 2y\hat{\mathbf{y}} + 2z\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

4. $F(r) = r^2$

$$\begin{aligned}\nabla r^2 &= \left(\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) r^2 \\ &= 2r\hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

5. $F(x, y, z) = xyz$

$$\begin{aligned}\nabla xyz &= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) xyz \\ &= yz\hat{\mathbf{x}} + xz\hat{\mathbf{y}} + xy\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

6. $F(x, y, z) = xy/(y + z)$

$$\begin{aligned}\nabla\frac{xy}{y+z} &= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{xy}{y+z} \\ &= \frac{y}{y+z}\hat{\mathbf{x}} + \frac{x(y+z)-xy}{(y+z)^2}\hat{\mathbf{y}} - \frac{xy}{(y+z)^2}\hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{y}{y+z}\hat{\mathbf{x}} + \frac{xz}{(y+z)^2}\hat{\mathbf{y}} - \frac{xy}{(y+z)^2}\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

0.2 三角形の点電荷

等しい電荷 Q を持つ 3 つの点電荷を一辺の長さが l の正三角形の各頂点になる様に構成する。この時必要な仕事の総量を求めよ。

答. まず 1 つの点電荷を置く事には仕事は必要ない。よって、最初の電荷を置く仕事 W_1 はゼロ。次に 2 つ目の電荷を置くが、ある距離 r において、この点電荷にかかる力は

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}$$

なので、無限遠から距離 l まで点電荷を運ぶ為に必要な仕事 W_2 は

$$\begin{aligned} W_2 &= -\int_{r=\infty}^{l}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{r}}dr \\ &= -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r=\infty}^{l} r^{-2}dr \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[r^{-1}\right]_{r=\infty}^{l} \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} \end{aligned}$$

最後に 3 つ目の点電荷を置くが、この作業は先の 2 つの点電荷を結ぶ線分の垂直二等分線上において行うものとする。つまり先の 2 つの点電荷を結ぶ線分の中点からの距離を z とし、3 つ目の点電荷を z が無限大から $l\sqrt{3}/2$ まで移動させる。任意の z において、3 つ目の点電荷が先の 2 つの点電荷より受ける力は

$$\mathbf{F} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{((l/2)^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{z}$$

なので、3 つ目の点電荷を置く為に必要な仕事 W_3 は

$$\begin{aligned} W_3 &= -\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0}\int_{z=\infty}^{l\sqrt{3}/2}\frac{z}{((l/2)^2+z^2)^{3/2}}dz \\ &= \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[((l/2)^2+z^2)^{-1/2}\right]_{z=\infty}^{l\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 l} \end{aligned}$$

よって 3 つの点電荷を正三角形の各頂点に配置する為に必要な仕事 W は

$$\begin{aligned} W &= W_1+W_2+W_3 \\ &= \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} \end{aligned}$$

0.3 一様な電荷の輪

単位長さあたりの電荷密度 λ をもつ輪の中心の静電ポテンシャルは、その輪の半径に依存しない事を示せ。

ある極小単位線分あたりの静電ポテンシャル $\Delta\phi$ は

$$\Delta\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

なので輪の中心の静電ポテンシャル ϕ は、半径 R として、

$$
\begin{aligned}
\phi &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} R d\theta \\
&= \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

よって、単位長さあたりの電荷密度が与えられている輪の中心の静電ポテンシャルは、その輪の半径に依存しない。

0.4 一様な電荷の球殻

単位面積あたりの電荷密度 σ をもつ半径 R の球殻の中心から $a \neq R$ だけ離れた点において、

1. 球殻内部 $a < R$ での静電ポテンシャルの分布を、過去の授業内容から推測せよ。

   以前の授業より球殻内の電場はゼロである事を思い出すと、$\mathbf{E} = -\nabla\phi$ なので、静電ポテンシャル ϕ は一定である事が推測できる。

2. 球殻内部と外部それぞれの任意の点での静電ポテンシャルを求めよ。ただし球殻において静電ポテンシャルの値は連続である。

   球殻の外部（$r \geq R$）の電場 $\mathbf{E}_{out}$ はガウスの法則より

$$
\mathbf{E}_{out} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}
$$

   無限遠から距離 $r \geq R$ まで積分すると

$$
\begin{aligned}
\phi_{out} &= -\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\int_{r'=0}^{r} r'^{-2} dr' \\
&= \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}
\end{aligned}
$$

   また、$r = R$ において、$\phi_{in} = \phi_{out}$ なので、

$$
\phi_{in} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}
$$

   よって、静電ポテンシャル $\phi = \phi(r)$ は

$$
\phi = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} & \text{for } r \geq R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} & \text{for } r < R \end{cases}
$$