物理学基礎論 B レポート 05 - 解答

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成 26 年 1 月 31 日

1 静電ポテンシャル基礎

以下の静電ポテンシャル ϕ または電場 $\mathbf{E}$ が与えられた時、任意の点での他方を求めよ。ただし $\mathbf{u} =< x, y, z >$ は直交座標系を、$\mathbf{u} =< r, \theta, \phi >$ は球座標系を示す。

1. $\phi(r, \theta, \phi) = \phi_0 / r$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\phi_o}{r} = \frac{\phi_o}{r^2}$$

2. $\phi(x, y, z) = \phi_0(x + y + z)/(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = -\nabla\phi &= -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} \\ &= -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \hat{\mathbf{y}}\frac{x^2+y^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \hat{\mathbf{z}}\frac{x^2+y^2+z^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)\end{aligned}$$

3. $\phi(x, y, z) = \phi_0 / \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$
   $x - a \to x'$、$y - b \to y'$、$z - c \to z'$ とおくと、$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \to \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = r'$ と出来る。$< x, y, z >=< a, b, c >$ に原点を置く球座標系を考えて、

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = -\nabla\phi &= -\nabla'\phi = -\hat{\mathbf{r}'}\frac{\partial}{\partial r'}\frac{\phi_0}{r'} = \frac{\phi_0}{r'^2}\hat{\mathbf{r}'} \\ &= \frac{\phi_0(x, y, z)}{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

4. $\mathbf{E}(x, y, z) = E_0\hat{\mathbf{z}}$
   xy 平面を静電ポテンシャルがゼロとすると、

$$\begin{aligned}\phi &= -\int_{z'=0}^{z} E_0\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}}dz' \\ &= -E_0 z\end{aligned}$$

5. $\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \hat{\mathbf{r}}E_0/r^2$
   $r \to \infty$ にて静電ポテンシャルをゼロとすると

$$\begin{aligned}\phi &= -\int_{r'=\infty}^{r}\frac{E_0}{r'^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}dr \\ &= \left[\frac{E_0}{r'}\right]_{r'=\infty}^{r} = \frac{E_0}{r}\end{aligned}$$

2 一様な電荷の球

単位体積あたりの電荷密度 ρ をもつ半径 R の球の中心から R だけ離れた点における、静電ポテンシャルを求めよ。
ガウスの法則より、電場 $\mathbf{E}$ は

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \hat{\mathbf{r}}\,\rho r/3\varepsilon_0 & \text{for } r \le R \\ \hat{\mathbf{r}}\,\rho R^3/3\varepsilon_0 r^2 & \text{for } r > R \end{cases}$$

なので、$r \to \infty$ に静電ポテンシャルがゼロであるとすると、$r \ge R$ において静電ポテンシャルは

$$\begin{aligned}\phi(r \ge R) &= -\int_{r'=\infty}^{r} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r'^2} dr' \\ &= \left[\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r'}\right]_{r'=\infty}^{r} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\end{aligned}$$

これより $\phi(R) = \rho R^2/3\varepsilon_0$ であるが静電ポテンシャルは連続で無ければならないので、内側においては

$$\begin{aligned}\phi(r \le R) &= -\int_{r'=R}^{r} \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0} dr' + \phi(R) \\ &= \left[-\frac{\rho r'^2}{6\varepsilon_0}\right]_{r'=R}^{-r} + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} \\ &= \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0}\end{aligned}$$

となる。よって静電ポテンシャルは

$$\phi(r) = \begin{cases} \rho(3R^2 - r^2)/6\varepsilon_0 & \text{for } r \le R \\ \rho R^3/3\varepsilon_0 r & \text{for } r > R \end{cases}$$

3 無限に長い点電荷の並び

無限に長い直線上に正負の点電荷 $\pm q$ が交互に a の間隔をおいて並んでいる。この時、ある点電荷 1 つあたりの静電エネルギーを求めよ。(長岡,2-9 問 3)
同じ電荷 Q を持ち直線上等距離 r かつ逆側にあるふたつの点電荷によってある電荷 q の点電荷に与えられる静電エネルギー U' は

$$U' = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Qq}{r}$$

である。隣合う点電荷の距離を l とすると、ある点電荷から左右 n 番目の点電荷による静電エネルギー U_n は

$$U_n = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(-1)^n 2q^2}{nl}$$

となるので、ある点電荷あたりの静電エネルギー U は

$$\begin{aligned}U &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(-1)^n 2q^2}{nl} \\ &= \frac{2q^2}{8\pi\varepsilon_0 l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \\ &\quad \left| \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \right. \text{ なので (http://mathworld.wolfram.com/NaturalLogarithmof2.html)} \\ &= -\frac{q^2 \ln 2}{4\pi\varepsilon_0 l}\end{aligned}$$

4　一様な電荷の直線

1. 単位長さあたりの電荷密度 λ をもつ無限に長い直線から距離 r におけるの静電ポテンシャルを求めよ。
ガウスの法則より、ある距離 r における電場 $\mathbf{E}$ は

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}$$

なので、これを不定積分し、

$$\begin{aligned}\phi &= -\int \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{r}}dr \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + E_0\end{aligned}$$

ここで E_0 はある定数である。式を見れば一目瞭然だが、$r \to \infty$ において $\phi \to \infty$ である。故に $\phi = 0$ となる基準点を無限大ではなく $\ln(r) = 0$ つまり $r = 1$ に置けば

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r)$$

2. 1. と同様の直線が 2 つ、距離 a だけ離れてねじれの位置に存在している。この時、直線ひとつあたりの静電エネルギーが最も低い場合の位置関係とそのエネルギーを答えよ。

図 1の様に、一方の直線を A、他方を B、ふたつの直線のねじれ角を $\theta(\theta = 0$ で並行)、最も近い点を O、点 O からの距離を L とすると、直線 B 上のある点 P から直線 A への距離 r は $r = \sqrt{a^2 + (l\sin\theta)^2}$ であるので、点 P における直線 A による電場 $\mathbf{E}_p$ はガウスの法則より、

$$\mathbf{E}_p = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + (l\sin\theta)^2}}\hat{\mathbf{r}}$$

これを直線 B について積分すると、角度 θ は維持されるので、合力としては図 1における Z 方向の成分のみ残ることが対称性より解る。よって直線 B が直線 A から受ける力の総量 F は

$$\begin{aligned}F &= \int_{l=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + (l\sin\theta)^2}}\,\frac{a}{\sqrt{a^2 + (l\sin\theta)^2}}\,dl \\ &= \frac{\lambda^2 a}{2\pi\varepsilon_0}\,2\int_{l=0}^{\infty}\frac{dl}{a^2 + (l\sin\theta)^2} \\ &= \frac{\lambda^2 a}{\pi\varepsilon_0\sin^2\theta}\left[\frac{\sin\theta}{a}\mathrm{atan}(\frac{l\sin\theta}{a})\right]_{l=0}^{\infty} \\ &= \frac{\pi\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0\sin\theta}\end{aligned}$$

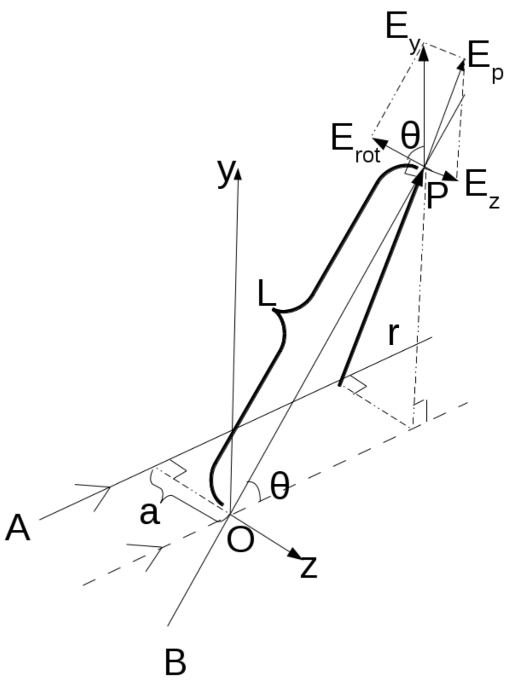

図 1: 問 4-2 の模式図。ねじれの位置にある二つの直線

となり、z 軸に沿った静電エネルギー U_z は $a = 1$ にて静電エネルギーをゼロとすると

$$\begin{aligned}U_z &= -\frac{1}{2}\int_{a'=1}^{a}\mathbf{F}\cdot d\hat{\mathbf{l}}' \\ &= -\frac{1}{2}\int_{a'=1}^{a}\frac{\pi\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0\sin\theta}da' \\ &= -\frac{\lambda^2(a-1)}{4eps\sin\theta}\end{aligned}$$

また、z-軸まわりのトルク N について考えると、ワイヤーと回転軸に垂直な成分 (図 1 の E_{rot}) が働くので、

$$\begin{aligned}
N &= \int_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 l}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+(l\sin\theta)^2}}\ \frac{l\sin\theta}{\sqrt{a^2+(l\sin\theta)^2}}\ \cos\theta\, dl \\
&= \frac{\lambda^2\sin\theta\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0}\int_{l=-\infty}^{\infty}\frac{l^2}{a^2+(l\sin\theta)^2}dl \\
&= \frac{\lambda^2\sin\theta\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0\sin^2\theta}\left[l-\frac{a}{\sin\theta}\mathrm{atan}\left(\frac{l\sin\theta}{a}\right)\right]_{l=-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{\lambda^2\cos\theta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{2}{\pi\sin\theta}\lim_{l\to\infty} l - a\right)
\end{aligned}$$

これは $\theta=\pi/2$ ではゼロ、それ以外では無限大になることが直ぐに解る。では $\theta=\pi/2$ にて静電エネルギー U_z の大きさも最小であれば話が簡単であるが、

$$\frac{\partial U_z}{\partial\theta} = \frac{\lambda^2(a-1)\cos\theta}{4\varepsilon_0\sin^2\theta}$$

であるので、$\theta=\pi/2$ にて大きさが最小となる事が解る。よって、$a=1$、$\theta=\pi/2$ にて静電エネルギーをゼロとすると、ある距離 a において直線ひとつあたりの静電エネルギーが最も低い場合 ($\theta=\pi/2$) の静電エネルギー U は

$$U = -\frac{\lambda^2(a-1)}{4\varepsilon_0}$$

(2. 他の解法)

二つの直線を図 1の様に置く。1. の静電ポテンシャル ϕ より、距離 z にある一方の棒における静電エネルギー U を考えると、

$$U(z) = -\frac{1}{2}\int_{l=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\sqrt{l^2\sin^2\theta+z^2})dl$$

これは常に無限大に思えるが、$z=1$ における静電エネルギーを基準とし、$U(z=1)=0$ とすると、

$$\begin{aligned}
U(a) &= -\frac{1}{2}\int_{l=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\sqrt{l^2\sin^2\theta+z^2})dl - \frac{1}{2}\int_{l=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\sqrt{l^2\sin^2\theta+1^2})dl \\
&= -\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\,2\left\{\int_{l=0}^{\infty}\ln(\sqrt{l^2\sin^2\theta+z^2})dl - \int_{l=0}^{\infty}\ln(\sqrt{l^2\sin^2\theta+1^2})dl\right\} \\
&= -\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[l\ln\left(\sqrt{l^2\sin^2\theta+a^2}\right)+\frac{a}{\sin\theta}\,\mathrm{atan}\left(\frac{l\sin\theta}{a}\right) - l\ln\left(\sqrt{l^2\sin^2\theta+1^2}\right) - \frac{1}{\sin\theta}\,\mathrm{atan}\left(l\sin\theta\right)\right]_{l=0}^{\infty} \\
&= -\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\pi(a-1)}{2\sin\theta}+\lim_{l\to\infty} l\ln\left(\sqrt{\frac{l^2\sin^2\theta+a^2}{l^2\sin^\theta+1}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

ここで、l の極限はゼロになるので、

$$U(a) = -\frac{\lambda^2(a-1)}{4\varepsilon_0\sin\theta}$$

これの大きさは $\theta=\pi/2$ の時に最小になり、

$$U_{min}(a) = -\frac{\lambda^2(a-1)}{4\varepsilon_0}$$