物理学基礎論Bレポート06

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成25年11月26日

1 ラプラス方程式

ラプラス方程式

$$\nabla^2\phi = 0$$

について、ϕ が球対象である事を仮定した上で、以下の問いに答えよ。ただし、ラプラシアン（Laplacian）は球座標系において

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

である。

1. $\phi = \phi(r) = A + B/r$ がラプラス方程式の解である事を示せ。ただし A、B はそれぞれ定数。
2. 以下の式をラプラス方程式に代入し、先の $\phi = A + B/r$ 以外の一般的な（境界条件が指定されていない場合の）多項式解が存在しない事を確かめよ。

$$\phi(r) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{B_n}{r^n} + C_n r^n\right)$$

ただし A は定数、B_n、C_n はある n においてユニークな定数である

2 ポアソン方程式

ポアソン方程式

$$\nabla^2\phi = F \quad ※\ F\text{は既知の関数}$$

について、F が無限大を含まない範囲において、微係数 $\partial\phi/\partial r$ が連続である事を示せ。

3 一様な電荷の球殻

単位面積あたりの電荷密度が σ である、半径 R の球殻の静電ポテンシャルをポアソン方程式を用いて求めよ。ヒント：ディラックのデルタ関数を用いて、単位面積あたりの電荷密度 $\rho = \sigma\delta(r-R)$ と置くと良い。

4 2層の球

単位体積あたりの電荷密度が ρ_A である半径 a の球を覆うように、単位体積あたりの電荷密度が ρ_B である厚さ b の層がある。中心から任意の距離 r の地点の静電ポテンシャルをポアソン方程式を用いて求めよ。

5　N 層の球

単位体積あたりの電化密度が $+\rho$ と $-\rho$ である層が厚さ l で交互に重なって、球体を形作っている。中心に半径 l で電荷密度 $+\rho$ の球があり、その上に電荷密度 $-\rho$ の層と続いて、中心の球も含めて N 層の構造であるとき、中心から任意の距離 r における静電ポテンシャルを求めよ。