

物理学基礎論 B レポート 06-解答

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成 26 年 1 月 15 日

1 ラプラス方程式

ラプラス方程式

$$\nabla^2 \phi = 0$$

について、 ϕ が球対象である事を仮定した上で、以下の問いに答えよ。ただし、ラプラシアン (Laplacian) は球座標系において

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

である。

1. $\phi = \phi(r) = A + B/r$ がラプラス方程式の解である事を示せ。ただし A, B はそれぞれ定数。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(r) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(A + \frac{B}{r} \right) \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{-B}{r^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. 以下の式をラプラス方程式に代入し、先の $\phi = A + B/r$ 以外の一般的な (境界条件が指定されていない場合の) 多項式解が存在しない事を確かめよ。

$$\phi(r) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_n}{r^n} + C_n r^n \right)$$

ただし A は定数、 B_n, C_n はある n においてユニークな定数である

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_n}{r^n} + C_n r^n \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-n B_n}{r^{n+1}} + n C_n r^{n-1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-B_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n B_n}{r^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} n C_n r^{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1) B_n}{r^{n+2}} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) C_n r^{n-2} \end{aligned}$$

全ての r においてこの等式を成り立たせる為には、右辺の各項の係数がゼロで無ければならない。よって

$$B_n = 0 \quad \text{for } n = 2, 3, 4, \dots$$

$$C_n = 0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

すなわちゼロとならない係数は A と B_1 なので与式以外の一般的な多項式解は存在しない。(Q.E.D.)

2 ポアソン方程式

ポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi = F \quad F \text{ は既知の関数}$$

について、 F が無限大を含まない範囲において、微係数 $\partial\phi/\partial r$ が連続である事を示せ。

微分係数が連続であるとは、ある点 $r = R_0$ 周りの極小域 $\{r \in [R_0 \pm \Delta], \text{ for } \Delta \rightarrow 0\}$ において、

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[\frac{\partial\phi}{\partial r} \right]_{r=R_0+\Delta} - \left[\frac{\partial\phi}{\partial r} \right]_{r=R_0-\Delta} = 0$$

となり、微分係数の値が極限を取る方向に依存せず一意的に求まる事を言う。

そこで、ポアソン方程式を展開すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) &= F \\ \int_{R_0-\Delta}^{R_0+\Delta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) dr &= \int_{R_0-\Delta}^{R_0+\Delta} r^2 F dr \end{aligned}$$

となり、これの左辺は $\Delta \rightarrow 0$ の極限において

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &\rightarrow \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right]_{R_0-\Delta}^{R_0+\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} R_0^2 \left(\left[\frac{\partial\phi}{\partial r} \right]_{R_0+\Delta} - \left[\frac{\partial\phi}{\partial r} \right]_{R_0-\Delta} \right) \end{aligned}$$

また右辺も同様の極限において、

$$\text{R.H.S.} \rightarrow \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{R_0-\Delta}^{R_0+\Delta} r^2 F dr$$

となるが、 F が $r = R_0$ 周りにおいて無限大を含まない場合、台形公式を用いて近似し、

$$\begin{aligned} \text{R.H.S.} &\rightarrow \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta \left((R_0 + \Delta)^2 F(R_0 + \Delta) + (R_0 - \Delta)^2 F(R_0 - \Delta) \right) \\ &= 2R_0^2 F(R_0) [\Delta]_{\Delta \rightarrow 0} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

よって、これらをまとめると

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\left[\frac{\partial\phi}{\partial r} \right]_{R_0+\Delta} - \left[\frac{\partial\phi}{\partial r} \right]_{R_0-\Delta} \right) \rightarrow 0$$

となり、微分係数は連続であると示せる。(Q.E.D.)

3 一様な電荷の球殻

単位面積あたりの電荷密度が σ である、半径 R の球殻の静電ポテンシャルをポアソン方程式を用いて求めよ。
ヒント：ディラックのデルタ関数を用いて、単位面積あたりの電荷密度 $\rho = \sigma\delta(r - R)$ と置くと良い。

単位面積あたりの電荷密度 $\rho = \sigma\delta(r - R)$ と置くと、ポアソン方程式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \delta(r - R)$$

$r \neq R$ において、左辺はゼロであるので、静電ポテンシャル ϕ はラプラス方程式の一般解の形を取り、

$$\begin{aligned}\phi_{in} &= A_{in} + \frac{B_{in}}{r} \\ \phi_{out} &= A_{out} + \frac{B_{out}}{r}\end{aligned}$$

ここで in は $r < R$ 、 out は $r > R$ の領域を示す。

各極限における境界条件より、
 $r \rightarrow 0$ にて ϕ は有限であるので

$$B_{in} = 0$$

よって

$$\phi_{in} = A_{in}$$

$r \rightarrow \infty$ にて $\phi = 0$ と規定すれば

$$A_{out} = 0 \tag{1}$$

よって

$$\phi_{out} = \frac{B_{out}}{r}$$

$r = R$ において、 ϕ は連続なので、

$$\phi_{in}(R) = \phi_{out}(R) \tag{2}$$

よって

$$A_{in} = \frac{B_{out}}{R}$$

また $r = R$ にて、ポアソン方程式の右辺は無限大なので、 $r = R$ 周りの極小域に関して積分して

$$\left(\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{out} - \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{in} \right) \rightarrow -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{3}$$

よって

$$\frac{B_{out}}{r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

以上をまとめると、

$$\begin{aligned}\phi_{in}(r \leq R) &= \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \\ \phi_{out}(r > R) &= \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}\end{aligned}$$

4 2層の球

単位体積あたりの電荷密度が ρ_A である半径 a の球を覆うように、単位体積あたりの電荷密度が ρ_B である厚さ b の層がある。中心から任意の距離 r の地点の静電ポテンシャルをポアソン方程式を用いて求めよ。

ある一定電荷密度 ρ 中の静電ポテンシャルの一般解はポアソン方程式より

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} &= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r^3 + C \\ \phi(r) &= -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 - \frac{C}{r} + D\end{aligned}$$

ここで C 、 D はある定数である。また、この球の外側は真空であるので、静電ポテンシャルはラプラス方程式の一般解となるので、

$$\begin{aligned}\phi_A(r) &= -\frac{\rho_A r^2}{6\epsilon_0} - \frac{C_A}{r} + D_A \quad \text{for } r \leq a \\ \phi_B(r) &= -\frac{\rho_B r^2}{6\epsilon_0} - \frac{C_B}{r} + D_B \quad \text{for } a < r \leq b \\ \phi_{out}(r) &= \frac{C_{out}}{r} + D_{out} \quad \text{for } r > b\end{aligned}$$

またこれらの微分係数は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_A}{\partial r} &= -\frac{\rho_A r}{3\epsilon_0} + \frac{C_A}{r^2} \\ \frac{\partial \phi_B}{\partial r} &= -\frac{\rho_B r}{3\epsilon_0} + \frac{C_B}{r^2} \\ \frac{\partial \phi_{out}}{\partial r} &= -\frac{C_{out}}{r^2}\end{aligned}$$

となる。

各極限における境界条件は、

$r \rightarrow 0$ にて ϕ は有限であるので

$$C_A = 0$$

$r \rightarrow \infty$ にて $\phi = 0$ と規定すると

$$D_{out} = 0$$

$r = a$ にて ϕ は連続でなめらかであるので

$$\begin{aligned}\phi_A(a) = \phi_B(a) \quad \text{より} \quad -\frac{\rho_A a^2}{6\epsilon_0} - \frac{C_A}{a} + D_A &= -\frac{\rho_B a^2}{6\epsilon_0} - \frac{C_B}{a} + D_B \\ \left[\frac{\partial \phi_B}{\partial r} \right]_a - \left[\frac{\partial \phi_A}{\partial r} \right]_a = 0 \quad \text{より} \quad -\frac{\rho_A a}{3\epsilon_0} + \frac{C_A}{a^2} &= -\frac{\rho_B a}{3\epsilon_0} + \frac{C_B}{a^2}\end{aligned}$$

$r = b$ にて ϕ は連続でなめらかであるので

$$\begin{aligned}\phi_B(b) = \phi_{out}(b) \quad \text{より} \quad -\frac{\rho_B b^2}{6\epsilon_0} - \frac{C_B}{b} + D_B &= \frac{C_{out}}{b} + D_{out} \\ \left[\frac{\partial \phi_{out}}{\partial r} \right]_b - \left[\frac{\partial \phi_B}{\partial r} \right]_b = 0 \quad \text{より} \quad -\frac{\rho_B b}{3\epsilon_0} + \frac{C_B}{b^2} &= -\frac{C_{out}}{b^2}\end{aligned}$$

以上を解くと

$$\begin{aligned}\phi_A(r) &= -\frac{\rho_A r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho_B(b^2 - a^2) + \rho_A a^2}{2\varepsilon_0} \quad \text{for } r \leq a \\ \phi_B(r) &= -\frac{\rho_B r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{(\rho_A - \rho_B)a^3}{3\varepsilon_0 r} + \frac{\rho_B b^2}{2\varepsilon_0} \quad \text{for } a < r \leq b \\ \phi_{out}(r) &= \frac{\rho_B(b^3 - a^3) + \rho_A a^3}{3\varepsilon_0 r} \quad \text{for } r > b\end{aligned}$$

5 N層の球

単位体積あたりの電化密度が $+\rho$ と $-\rho$ である層が厚さ l で交互に重なって、球体を形作っている。中心に半径 l で電荷密度 $+\rho$ の球があり、その上に電荷密度 $-\rho$ の層と続いて、中心の球も含めて N 層の構造であるとき、中心から任意の距離 r における静電ポテンシャルを求めよ。

先の問題と同様に、ある一定電荷密度 ρ 中の静電ポテンシャルの一般解はポアソン方程式より

$$\phi(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 - \frac{C}{r} + D$$

中心を第 1 層として、第 k 層において電荷密度は k が奇数なら $+\rho$ 、偶数なら $-\rho$ なので、第 k 層における静電ポテンシャルの一般解は、

$$\phi_k(r) = -\frac{(-1)^{k+1}\rho}{6\varepsilon_0} r^2 - \frac{C_k}{r} + D_k = \frac{(-1)^k \rho}{6\varepsilon_0} r^2 - \frac{C_k}{r} + D_k$$

となる。ここで、第 k 層と第 $k+1$ 層の境界 ($r = lk$) について考えると、静電ポテンシャルは連続で滑らかであるので、

$$\begin{aligned}\phi_{k+1}(lk) = \phi_k(lk) \quad \text{より} \quad & \frac{(-1)^{k+1}\rho}{6\varepsilon_0} (lk)^2 - \frac{C_{k+1}}{lk} + D_{k+1} = \frac{(-1)^k \rho}{6\varepsilon_0} (lk)^2 - \frac{C_k}{lk} + D_k \\ \left[\frac{\partial \phi_{k+1}}{\partial r} \right]_{lk} - \left[\frac{\partial \phi_k}{\partial r} \right]_{lk} = 0 \quad \text{より} \quad & \frac{(-1)^{k+1}\rho lk}{3\varepsilon_0} + \frac{C_{k+1}}{(lk)^2} = \frac{(-1)^k \rho lk}{3\varepsilon_0} + \frac{C_k}{(lk)^2}\end{aligned}$$

これを各定数 C と D についての漸化式に直すと、

$$\begin{aligned}C_{k+1} &= C_k + \frac{2\rho l^3}{3\varepsilon_0} (-1)^k k^3 \\ D_{k+1} &= D_k + \frac{\rho l^2}{\varepsilon_0} (-1)^k k^2\end{aligned}$$

定数 C について、 $r = 0$ において静電ポテンシャルが有限であるためには $C_1 = 0$ で無ければならぬので、第 k 層における定数 C_k は

$$C_k = \frac{2\rho l^3}{3\varepsilon_0} \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^m m^3$$

一方、定数 D について、 $r \rightarrow \infty$ において静電ポテンシャルをゼロと規定すると、球の外側のポテンシャルは

$$\phi_{out}(r) = -\frac{C_{out}}{r}$$

であるので、第 N 層と外側の空間の境界 ($r = lN$) において、静電ポテンシャルが連続で滑らかであるためには

$$\begin{aligned}\phi_{out}(lN) = \phi_N(lN) \quad \text{より} \quad & -\frac{C_{out}}{lN} = \frac{(-1)^N \rho}{6\varepsilon_0} (lN)^2 - \frac{C_N}{lN} + D_N \\ \left[\frac{\partial \phi_{out}}{\partial r} \right]_{lN} - \left[\frac{\partial \phi_N}{\partial r} \right]_{lN} = 0 \quad \text{より} \quad & \frac{C_{out}}{(lN)^2} = \frac{(-1)^N \rho lN}{3\varepsilon_0} + \frac{C_N}{(lN)^2}\end{aligned}$$

でなければならないので、

$$D_N = -\frac{(-1)^N \rho l^2 N^2}{2\varepsilon_0}$$

である。先の D についての漸化式を第 N 層から降順に解くと

$$\begin{aligned} D_k &= -\frac{(-1)^N \rho l^2 N^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho l^2}{\varepsilon_0} \sum_{m=k}^{N-1} (-1)^m m^2 \\ &= -\frac{(-1)^N \rho l^2 N^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho l^2}{\varepsilon_0} \sum_{m=1}^{N-1} (-1)^m m^2 + \frac{\rho l^2}{\varepsilon_0} \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^m m^2 \end{aligned}$$

和の部分に関して、公式

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = \frac{1}{2} (-1)^n n(n+1)$$

をあてはめると、

$$\begin{aligned} D_k &= -\frac{(-1)^N \rho l^2 N^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho l^2}{2\varepsilon_0} (-1)^{N-1} (N-1)N + \frac{\rho l^2}{\varepsilon_0} \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^m m^2 \\ &= -\frac{(-1)^N \rho l^2 N}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho l^2}{\varepsilon_0} \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^m m^2 \end{aligned}$$

また $r = lN$ における C_N と C_{out} の関係式より、

$$\begin{aligned} C_{out} &= \frac{(-1)^N \rho l^3 N^3}{3\varepsilon_0} + \frac{2\rho l^3}{3\varepsilon_0} \sum_{m=1}^{N-1} (-1)^m m^3 \\ &= -\frac{(-1)^N \rho l^3 N^3}{3\varepsilon_0} + \frac{2\rho l^3}{3\varepsilon_0} \sum_{m=1}^N (-1)^m m^3 \end{aligned}$$

和の部分について、公式

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^3 = \frac{1}{8} ((-1)^n (4n^3 + 6n^2 - 1) + 1)$$

をあてはめると

$$\begin{aligned} C_{out} &= -\frac{(-1)^N \rho l^3 N^3}{3\varepsilon_0} + \frac{2\rho l^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{8} ((-1)^N (4N^3 + 6N^2 - 1) + 1) \\ &= \frac{\rho l^3}{12\varepsilon_0} ((-1)^N (6N^2 - 1) + 1) \end{aligned}$$

よって球内とその外側の静電ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi_k(r) &= -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 - \frac{1}{r} \frac{2\rho l^3}{3\varepsilon_0} \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^m m^3 - \frac{(-1)^N \rho l^2 N}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho l^2}{\varepsilon_0} \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^m m^2, \text{ for } l(k-1) \leq r < lk \\ \phi_{out}(r) &= -\frac{1}{r} \frac{\rho l^3}{12\varepsilon_0} ((-1)^N (6N^2 - 1) + 1), \text{ for } lN \leq r \end{aligned}$$

ただし k は N 以下の自然数である。この解に $N = 2$ を代入したものは先の問題の解答において $\rho_A = +\rho$ 、 $\rho_B = -\rho$ 、 $a = l$ 、 $b = 2l$ を代入したものと等しい。