物理学基礎論 B レポート 08 - 解答

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成 26 年 1 月 20 日

1　球殻のコンデンサー

　厚さを無視できる金属の球殻がふたつ、中心を共有している。これらの半径はそれぞれ a と b であり、$a < b$ である。内側の球殻に $+Q$ の電荷を、外側の球殻に $-Q$ の電荷を与え、このふたつの球殻によるコンデンサーの電気容量を求めよ。

ガウスの法則よりこのコンデンサーの外側での電場はゼロであることが解る。また内側の球殻の内側の空間でも電場はゼロである。また半径 r が $a < r < b$ の範囲において電場 E は半径方向に広がり、その大きさはガウスの法則より

$$E(a < r < b) \quad = \quad \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

であるので、ふたつの球殻の間に生まれるポテンシャルの差 ϕ は (注：低い方から高い方へ積分する)

$$\phi \quad = \quad -\int_{r=b}^{a} E dr \;=\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

よって、コンデンサーの電気容量 C は定義 $C = Q/\phi$ より

$$C \quad = \quad \frac{Q}{\phi} \;=\; 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1} \;=\; 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

2　円筒のコンデンサー

　半径 a と b（ただし $a < b$）で長さが共に L である円筒の厚さを無視できる金属板がふたつ、中心を共有している。内側の円筒は外側の円筒からはみ出していない。これらふたつの円筒によるコンデンサーの電気容量を求めよ。

内側の円筒に電荷 $+Q$ を、外側の円筒に電荷 $-Q$ を与える。十分に短い長さ $l \ll L$ をとり、コンデンサーと中心を共有する半径 $r(a < r < b)$ で長さ l の円柱の閉曲面を考えると、半径 r において電場は半径方向に広がっているので、ガウスの法則より、

$$E \quad = \quad \frac{Q/L}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

よって、ふたつの金属板の間の静電ポテンシャルの差 ϕ は (注：低い方から高い方へ積分する)

$$\phi \quad = \quad -\int_{b}^{a} \frac{Q/L}{2\pi\varepsilon_0 r} dr \;=\; \frac{Q/L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

よって、コンデンサーの電気容量 C は定義 $C = Q/\phi$ より

$$C \quad = \quad \frac{Q}{\phi} \;=\; \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$