

物理学基礎論 B レポート 10

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成 26 年 1 月 14 日

1 放射線の分離

運動エネルギーが E である α 線、 β 線、 γ 線が図 1 のように磁場の無い領域 ($y < 0$) から一定の磁場 $\mathbf{B} = B\hat{z}$ の領域 ($y > 0$) に座標系の原点を通って入ろうとしている。これらのうちいくつかは再び磁場の無い領域に戻ってくるが、戻ってこない物もある。戻ってこない放射線はどれか答えよ。また戻ってくる場合、磁場のある領域に滞在する時間と磁場の無い領域に戻る時 ($y = 0$) の位置の x 座標を求めよ。ただし E は十分に小さいものとし、相対性理論は適用しなくてよいものとする。

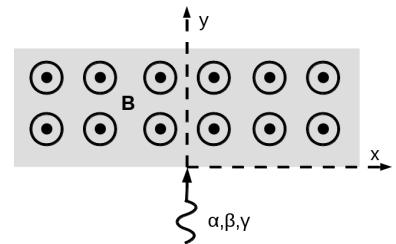


図 1: 問 1

2 正 N 角形のワイヤーに流れる電流

半径 R の円に内接する正 N 角形の細いワイヤーに電流 I が流れている。この正 N 角形の中心における磁場の磁束密度を求めよ。また $N \rightarrow \infty$ の極限を取った時の磁場が半径 R の円のワイヤーに電流 I を流した場合の磁場と等しい事を見せよ。

3 回るワイヤーの輪

均一な電荷線密度 λ を持つ半径 a の円の細いワイヤーの輪があり、円の中心を点 O とする。点 O を中心に円の平面上を角速度 ω で輪が回っている。この時、点 O から任意の距離 R における磁場を求めよ。

4 誘電体 (参考問題)

理論：誘電体中の電場

電場が与えられると誘電体中では分極しモーメント $\mathbf{P}$ が発生し、電場 $\mathbf{E}$ に対して

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

で表される。ここで χ_e は電気感受率 (electric susceptibility) で、線形誘電体 (linear dielectric material) の場合ゼロ以上の定数である。電束密度 $\mathbf{D}$ を電場による電束密度と分極モーメントの和として

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

と表される。ここで、 $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ はこの誘電体中の誘電率である。この電束密度 (electric flux density) は電気変位 (electric displacement) とも呼ばれる。また物体中の誘電率と真空中の誘電率の比を比誘電率 (relative permittivity または dielectric constant) と言い、

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

で表される。比誘電率のいくつかの例をここにあげると、真空の比誘電率は 1、100 °C の水蒸気の比誘電率は 1.00587、水 (液体) の比誘電率は 80.1、−30 °C の氷の比誘電率は 99 である¹。誘電体の表面には分極電荷 (polarization charge または bound charge) が発生し、その面密度 σ_b はその面に垂直な単位ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ と分極モーメントから

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

と導き出せる。この分極電荷を除くように、電束密度を用いてガウスの法則を書き直すと

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

となる。ここで ρ_f は自由電荷 (free electric charge) または真電荷 (true charge) と呼ばれ、誘電による分極によらない電荷である。

問題：一定電場下の誘電体

誘電率が ϵ の十分に大きく均一な誘電体の板に一定の電場 $\mathbf{E}_0$ が面に垂直にかけられている。誘電体内の電場を求めよ。また誘電体の表面に現れる分極電荷の面密度を求めよ。

¹参考文献:Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* より *Handbook of Chemistry and Physics*, 78ed. からの引用

参考問題の答え

問題：一定電場下の誘電体

誘電率が ϵ の十分に大きく均一な誘電体の板に一定の電場 $\mathbf{E}_0$ が面に垂直にかけられている。誘電体内の電場を求めよ。また誘電体の表面に現れる分極電荷の面密度を求めよ。

与えられている電場と誘導体の表面の垂直ベクトルとが同じ方向である面を考える。誘導体の表面を内包するように底面 A 高さ h の直方体の閉曲面 S を考えると、誘導体の表面には自由電荷はないので、ガウスの法則より

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\hat{\mathbf{s}} = \rho_f = 0$$

ここで、誘導体の外側では分極は起こらないので電束密度は $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ 。一方、誘導体の内側では分極がおこるので電束密度は $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 。よって先の式は

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_S \mathbf{D} \cdot d\hat{\mathbf{s}} \\ &= A(\epsilon_0 E_0 - \epsilon E) \\ \therefore E &= \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_0 \end{aligned}$$

また比誘電率と電気感受率との関係より、電気感受率 χ_e は

$$\chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1$$

なので、分極モーメント $\mathbf{P}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \\ &= \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \mathbf{E}_0 \\ &= \epsilon_0 \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \mathbf{E}_0. \end{aligned}$$

ゆえに表面に現れる電荷の密度 σ は

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= \epsilon_0 \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= \epsilon_0 \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) E_0 \end{aligned}$$