

物理学基礎論Bレポート10 - 解答

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成 26 年 1 月 30 日

1 放射線の分離

運動エネルギーが E である α 線、 β 線、 γ 線が図 1 のように磁場の無い領域 ($y < 0$) から一定の磁場 $B = B\hat{z}$ の領域 ($y > 0$) に座標系の原点を通って入ろうとしている。これらのうちいくつかは再び磁場の無い領域に戻ってくるが、戻ってこない物もある。戻ってこない放射線はどれか答えよ。また戻ってくる場合、磁場のある領域に滞在する時間と磁場の無い領域に戻る時 ($y = 0$) の位置の x 座標を求めよ。ただし E は十分に小さいものとし、相対性理論は適用しなくてよいものとする。

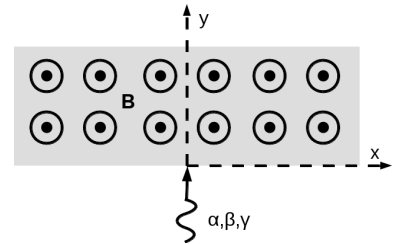


図 1: 問 1

ローレンツ力を向心力として考える。磁場に垂直なある速度 v で動く電荷 Q 質量 m の粒子は半径 R_c で旋回運動を行うがこの時、ローレンツ力が向心力となり、

$$-\frac{mv^2}{R_c}\hat{r} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

がなり立つので、 R について解くと

$$R_c = \frac{mv}{|Q|B}$$

ここで、旋回半径は常に正であるため、速度の方向と電荷の正負に依存しない様書き直していることに注意されたい。この半径の事を旋回半径 (gyroradius) またはラーマー半径 (Larmor radius) と呼び、プラズマ物理学における基本的な長さの一つである。またこの旋回運動の角速度 (または角振動数) ω_c は

$$\omega_c = \frac{v}{R_c} = \frac{|Q|B}{m}$$

となり、これをサイクロトロン振動数 (cycrotron frequency) と呼ぶ。サイクロトロン振動数は粒子の速度に依存しない事が特徴的である。

さて、問いの放射線を見てみると

放射線	構成粒子	静止質量	電荷
α 線	ヘリウム原子核	$4m_p$	$+2q_e$
β 線	電子	m_e	$-q_e$
γ 線	光子	0	0

である。各値は MKS 単位系で、陽子質量 m_p (ほぼ中性子質量と等しい) は $1.6726 \times 10^{-27}\text{kg}$ 、電子質量 m_e は $9.1094 \times 10^{-31}\text{kg}$ 、電気素量 q_e は $1.6022 \times 10^{-19}\text{C}$ である。ローレンツ力は電荷を持つ粒子に働くので、 γ 線は戻ってこない。 戻ってくる α 線と β 線は、方向を無視すれば、 $2R_c$ の距離にて π/ω_c 秒後に戻ってくる事は、半周分の旋回運動であることを考えれば直ぐに解る。速度 v と運動エネルギー E の関係は $E = \frac{1}{2}mv^2$ なので、電荷の符号による方向も考えると、

放射線	戻って来る位置 ($2R_c$)(m)	滞在時間 (π/ω_c)(s)
α 線	$4\sqrt{2m_p E}/q_e B$	$4\pi m_p/q_e B$
β 線	$-2\sqrt{2m_e E}/q_e B$	$\pi m_e/q_e B$

2 正 N 角形のワイヤーに流れる電流

半径 R の円に内接する正 N 角形の細いワイヤーに電流 I が流れている。この正 N 角形の中心における磁場の磁束密度を求めよ。また $N \rightarrow \infty$ の極限を取った時の磁場が半径 R の円のワイヤーに電流 I を流した場合の磁場と等しい事を見せよ。

ビオ・サバルの法則より、長さ L で電流 I が流れる直線のワイヤーが、ワイヤーの中心から距離 r の位置に作る磁場の磁束密度 ΔB の大きさは

$$\begin{aligned}\Delta B(r) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z=-L/2}^{L/2} \frac{I r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ &= \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \left[\frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + z^2}} \right]_{z=-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{L}{r \sqrt{r^2 + \frac{L^2}{4}}}\end{aligned}$$

ここで、円に内接する正 N 角形について考える。円の中心と隣合うふたつの頂点によって形作られる二等辺三角形の頂角の角度 θ_N は

$$\theta_N = \frac{2\pi}{N}$$

である。またこの二等辺三角形の底辺と高さはそれぞれ先の長さ L と距離 r に対応するので、

$$\begin{aligned}L &= 2R \sin\left(\frac{\theta_N}{2}\right) = 2R \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \\ r &= R \cos\left(\frac{\theta_N}{2}\right) = R \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\end{aligned}$$

よって先に求めたワイヤー N 本が正 N 角形に組まれる事によって出来る、中心の磁場の磁束密度 B の大きさは

$$\begin{aligned}B &= N \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2R \sin(\pi/N)}{R \cos(\pi/N) \sqrt{(R \cos(\pi/N))^2 + \frac{(2R \sin(\pi/N))^2}{4}}} \\ &= \frac{\mu_0 I N}{2\pi R} \frac{\sin(\pi/N)}{\cos(\pi/N)} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi R} \tan(\pi/N)\end{aligned}$$

で、方向は右ねじの法則に従う。

$N \rightarrow \infty$ の極限においては、 $N \sin(\pi/N)$ については sinc 関数である事に注意したい。正無限角形のワイヤーが作り出す磁場の方向は右ねじの法則に従い、その磁束密度の大きさは

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} B &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I N}{2\pi R} \frac{\sin(\pi/N)}{\cos(\pi/N)} = \frac{\mu_0 I}{2R} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N} \frac{1}{\cos(\pi/N)} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2R} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{sinc}(\pi/N)}{\cos(\pi/N)} = \frac{\mu_0 I}{2R}\end{aligned}$$

この答えは教科書 p158 の式 6.18 に合意し、円のワイヤーが生み出す磁場に等しい。

3 回るワイヤーの輪

均一な電荷線密度 λ を持つ半径 a の円の細いワイヤーの輪があり、円の中心を点 O とする。点 O を中心に円の平面上を角速度 ω で輪が回っている。この時、点 O から任意の距離 R における磁場を求めよ。

円柱座標系をとり、ワイヤーの輪 C の中心は原点、輪は x - y 平面上にあるものとする。ワイヤーに流れる電流 I は電荷線密度と速度の積で表され、

$$\mathbf{I} = \lambda a \omega \hat{\phi}$$

である。ここで、 $\hat{\phi} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ は方位角の単位ベクトルで、 z 軸を中心に反時計回りの方向を示す。 x - z 平面上のある点 $R = (x, 0, z)$ について、円周 C 上の任意の点 $r' = (a \cos\phi, a \sin\phi, 0)$ からの位置ベクトル \mathbf{r} は

$$\mathbf{r} = |\mathbf{R} - \mathbf{r}'| = (x - a \cos\phi, -a \sin\phi, z)$$

であるので、その大きさは

$$r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2ax \cos\phi}$$

である。この位置ベクトル \mathbf{r} と方位角の単位ベクトルとの外積は

$$\begin{aligned} \hat{\phi} \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ x - a \cos\phi & -a \sin\phi & z \end{vmatrix} \\ &= (z \cos\phi, z \sin\phi, a - x \cos\phi) \end{aligned}$$

以上より、ある点 R における磁場 $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ はビオ・サバルの法則より、

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}}{r^3} dl' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\lambda a \omega (z \cos\phi, z \sin\phi, a - x \cos\phi)}{(R^2 + a^2 - 2ax \cos\phi)^{3/2}} a d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\lambda a \omega (z \cos\phi, z \sin\phi, a - x \cos\phi)}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{2ax \cos\phi}{R^2 + a^2}\right)^{-3/2} a d\phi \end{aligned}$$

$a > 0$ において、最後の括弧内の分数の大きさは常に 1 より小さいか等しいので、テイラー展開をし、高次の項を無視すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \dots = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\lambda a \omega (z \cos\phi, z \sin\phi, a - x \cos\phi)}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{2ax \cos\phi}{R^2 + a^2} + \dots\right) a d\phi \\ &= \frac{\lambda \omega a^2}{4\pi (R^2 + a^2)^{3/2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{2ax \cos\phi}{R^2 + a^2}\right) (z \cos\phi, z \sin\phi, a - x \cos\phi) d\phi \end{aligned}$$

これを各成分 (H_x, H_y, H_z) についてそれぞれ解いていく。

$$\begin{aligned}
 H_x &= \frac{\lambda\omega a^2}{4\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{2ax \cos \phi}{R^2 + a^2}\right) z \cos \phi \, d\phi \\
 &= \frac{\lambda\omega a^2 z}{4\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \left\{ [\sin \phi]_0^{2\pi} + \frac{3ax}{R^2 + a^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi \right\} \\
 &= \frac{\lambda\omega a^2 z}{4\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \frac{3ax}{R^2 + a^2} \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{3\lambda\omega a^3 x z}{4(R^2 + a^2)^{5/2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_y &= \frac{\lambda\omega a^2}{4\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{2ax \cos \phi}{R^2 + a^2}\right) z \sin \phi \, d\phi \\
 &= \frac{\lambda\omega a^2 z}{4\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \left\{ [\sin \phi]_0^{2\pi} + \frac{3ax}{2R^2 + a^2} \int_0^{2\pi} \sin 2\phi \, d\phi \right\} \\
 &= \frac{\lambda\omega a^2 z}{4\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \frac{3ax}{2R^2 + a^2} \left[-\frac{\cos 2\phi}{2} \right]_0^{2\pi} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_z &= \frac{\lambda\omega a^2}{4\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{2ax \cos \phi}{R^2 + a^2}\right) (a - x \cos \phi) \, d\phi \\
 &= \frac{\lambda\omega a^2}{4\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(a - x \cos \phi + \frac{3a^2 x}{R^2 + a^2} \cos \phi - \frac{3ax^2}{R^2 + a^2} \cos^2 \phi \right) \, d\phi \\
 &= \frac{\lambda\omega a^2}{4\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \left\{ a [\phi]_0^{2\pi} + \left(-x + \frac{3a^2 x}{R^2 + a^2} \right) [\sin \phi]_0^{2\pi} - \frac{3ax^2}{R^2 + a^2} \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4} \right]_0^{2\pi} \right\} \\
 &= \frac{\lambda\omega a^2}{4\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \left(2\pi a - \frac{3ax^2 \pi}{R^2 + a^2} \right) \\
 &= \frac{\lambda\omega a^3}{2(R^2 + a^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3x^2}{2(R^2 + a^2)} \right)
 \end{aligned}$$

ここで、対称性についても考える。円筒座標系において \hat{r} 方向を先の x 軸方向とすると $\hat{\phi}$ 方向は y 軸方向となり、 z 軸まわりに対称性が保たれる事がわかる。よって、ある任意の点 $\mathbf{R} = r\hat{r} + z\hat{z}$ における磁場は円筒座標系において、

$$\mathbf{H} = \frac{\lambda\omega a^3}{2(R^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} + \frac{3\lambda\omega a^3 r}{4(R^2 + a^2)^{5/2}} (z\hat{r} - r\hat{z})$$