物理学基礎論 B レポート 11-解答

河村聡人 (Akito D. Kawamura)

平成 26 年 1 月 31 日

1 電流計

一定の磁場 $\boldsymbol{B_0} = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$ の下に一辺 a の正方形で N 回巻きのコイルが置いてある。コイルはある向かい合う二辺の中点を通る軸を中心にまわるように設計されている。コイルの回転軸は与えられている磁場 B_0 とは垂直 (y 軸方向) である。コイルには長さ L 重さ m の真っ直ぐで均一な棒が外側に、コイルと平面を同じくして、回転軸と垂直の方向に取り付けられている。この棒は初め x 軸の正の方向に z 軸からある角度 $\theta_0(\pi/2 < \theta_0 < \pi)$ 傾いて置かれており、それよりも下へは向かないように支えがしてある。電流 I をコイルに流した時、(1) コイルが生み出す磁気双極子モーメントと (2) 棒の z 軸からの角度 θ を求めよ。また、(3) 棒が持ちあがるのに必要な最低限の電流を求めよ。ただし重力加速度は定数 g とし、コイルや回転軸の重さ、コイルや回転軸、棒の厚みは無視出来るものとする。

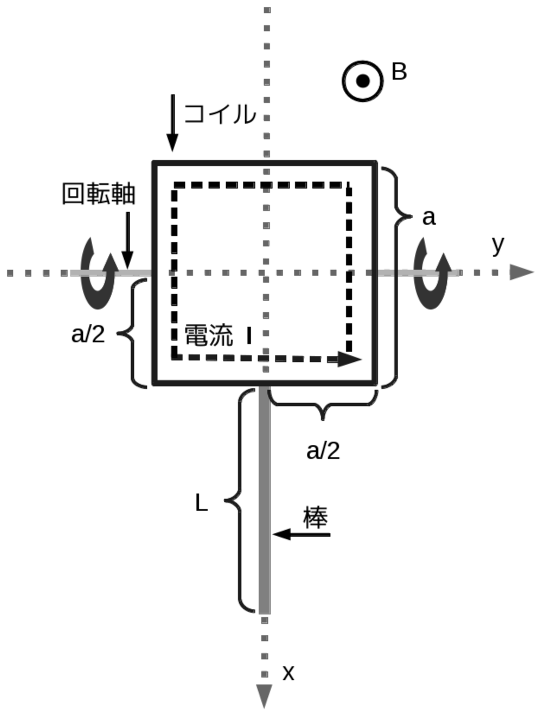

図 1: コイルを z 軸上から見下ろした図

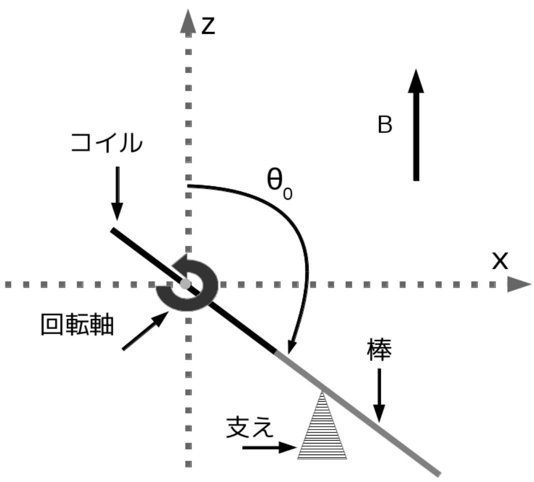

図 2: コイルを横から眺めた図

(1) コイルに電流 I を流した時の磁気双極子モーメント $\boldsymbol{\mu}$ は、定義より

$$\boldsymbol{\mu} = Ia^2\hat{\boldsymbol{n}}$$

$\hat{\boldsymbol{n}}$ はコイルの面に垂直な単位ベクトルで、向きは流された電流と右ねじの法則に従う。よって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= Ia^2\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right) \\ &= Ia^2(\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}})\end{aligned}$$

(2)y 軸負方向を中心に反時計周りでトルクの釣り合いを考える。
棒が生み出すトルク N_{rod} は

$$N_{rod} = -\frac{(a+L)mg}{2}\sin\theta$$

また、外部磁場 B_0 と磁気双極子モーメント μ によるトルク N_μ は

$$\begin{aligned} N_\mu &= B\mu\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -B\mu\cos\theta \end{aligned}$$

ここで、$\theta > \pi/2$ なので、cos の値は負であることに注意されたい。この二つのトルクが釣り合う為には

$$\begin{aligned} 0 &= N_{rod} + N_m \\ &= -\frac{(a+L)mg}{2}\sin\theta - B\mu\cos\theta \\ \tan\theta &= \frac{2B\mu}{(a+L)mg} \end{aligned}$$

よって

$$\theta = \mathrm{atan}\left(-\frac{2BIa^2}{(a+L)mg}\right)$$

ただし、支えがあるので、$\theta \leq \theta_0$ で無ければならない。

(3) 弱い電流では棒が支えから離れない。棒が支えから離れる為に必要な最低限の電流 I_{min} は、先の式より

$$\tan(\theta_0) = \frac{2BI_{min}a^2}{(a+L)mg}$$

を満たさなければならないので、

$$I_{min} = \frac{(a+L)mg}{2Ba^2}\tan(\theta_0)$$

2 シリンダーに流れる電流

内側の半径 a、外側の半径 b の長いシリンダーの内部に電流 I が流れている。電流はシリンダー内を均一に流れているとすると、このシリンダーの中心から任意の半径 r の位置の磁場を求めよ。

電流はシリンダー内に均等に流れているので、単位断面積あたりに流れる電流の密度 j は

$$j = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$$

である。半径 r で中心がシリンダーの軸である円 S の閉曲線 C を考え、アンペールの法則を適用すると、$r \geq b$ では

$$\begin{aligned} \oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\hat{\boldsymbol{l}} &= \mu_0 I_{enc} \\ 2\pi r B &= \mu_0 I \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{aligned}$$

$a \leq r < b$ では

$$
\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\hat{\boldsymbol{l}} &= \mu_0 I_{enc} \\
&= \mu_0 \int_{r'=a}^{r} \int_{\theta=0}^{2\pi} jr' d\theta dr' \ = \ \mu_0 2\pi \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} \int_{r'=a}^{r} r' dr' \\
2\pi r B &= \mu_0 2\pi \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} \left[\frac{r'^2}{2} \right]_a^r \\
B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}
\end{aligned}
$$

$r \leq a$ では

$$
\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\hat{\boldsymbol{l}} &= \mu_0 I_{enc} \\
2\pi r B &= 0 \\
B &= 0
\end{aligned}
$$

なお、これら磁場 B の方向は電流 I の流れる方向に対して反時計回りで、右ねじの法則を満す方向である。

3　ソレノイド

中心を共有する二つのソレノイド（コイル）がある。内側のソレノイドは半径が a で、単位長さあたり n_a 回巻いてある。外側のソレノイドは半径が b で、単位長さあたり n_b 回巻いてある。両方のソレノイドに共に電流 I を、ただし逆方向に流した時、任意の半径 r の磁場の磁束密度を答えよ。

任意の半径 r を $r_1 \leq a$、$a < r_2 \leq b$、$r3 > b$ と区分けする。ソレノイドの外側の磁場はゼロであるので、外側の磁場 $B(r_3)$ は

$$
B(r_3) = 0
$$

である。よって、一辺の中心から距離が $r3$ で他方が $r1$ または $r2$ である長さ L の長方形の閉曲面 C を考えアンペールの法則

$$
\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\hat{\boldsymbol{l}} = \mu_0 I_{enc}
$$

を適用すれば良い。ただし、外側のソレノイドに流れる電流を便宜上正方向とする。

$r2$ と $r3$ に挟まれた長方形の閉曲面についてアンペールの法則を考える、

$$
\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\hat{\boldsymbol{l}} = B(r_2)L = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 I n_b L
$$

よって

$$
B(r_2) = \mu_0 I n_b
$$

$r2$ と $r3$ に挟まれた長方形の閉曲面についてアンペールの法則を考える、

$$
\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\hat{\boldsymbol{l}} = B(r_2)L = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 I n_b L
$$

よって

$$
B(r_2) = \mu_0 I n_b
$$

$r1$ と $r3$ に挟まれた長方形の閉曲面についてアンペールの法則を考える、

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\hat{\boldsymbol{l}} = B(r_1)L \quad = \quad \mu_0 I_{enc} = \mu_0(In_b - In_a)L$$

よって

$$B(r_1) \quad = \quad \mu_0 I(n_b - n_a)$$