熱伝導解析解　(Landau & Lifshitz 流体力学)

熱伝導度が温度の冪で変化する密度一様一定の系で、$t=0$ に $x=0$ の平面に単位面積当たり Q[erg cm^{-2}] の熱量が与えられたときの、$t>0$ における温度分布 (初期に平面 $x=0$ 以外の点では $T=0$)。

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{1}$$

$\kappa = \kappa_0 T^n$ (κ: [erg/(cm K)]), $\epsilon = p/(\gamma-1)$, $T = \mu p/(\rho_0 R_g)$, μ, ρ_0 are uniform and constant, R_g is gas constant.

$$\longrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(p^n \frac{\partial p}{\partial x}\right) \qquad \text{where} \quad a = \kappa_0(\gamma-1)\left(\frac{\mu}{\rho_0 R_g}\right)^{n+1} \quad [\mathrm{cm}\ ^2\mathrm{sec}\ (\mathrm{cm}^3\mathrm{erg})^n] \tag{2}$$

無次元量： $\xi = \dfrac{x}{(Q^n a t)^{1/(n+2)}}$ (3)

を導入すると、解は

$$p(x,t) = \left(\frac{Q^2}{at}\right)^{1/(n+2)} f(\xi) \tag{4}$$

の形で書ける。これを熱伝導方程式に代入すると、

$$(2+n)\frac{d}{\xi}\left(f^n \frac{df}{d\xi}\right) + \xi\frac{df}{d\xi} + f = 0 \tag{5}$$

となり、その解は

$$f(\xi) = \left[\frac{1}{2}\frac{n(\xi_0^2-\xi^2)}{2+n}\right]^{1/n} \tag{6}$$

である。積分定数 ξ_0 は全熱量保存の条件から決められる。

$$\text{i.e.} \qquad Q = Q\int_{-\xi_0}^{\xi_0} f(\xi)d\xi \tag{7}$$

よって、

$$\xi_0^{n+2} = \frac{(2+n)^{1+n}2^{1-n}}{n\pi^{n/2}}\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma^n\left(\frac{1}{n}\right)} \qquad \left(\xi_0 \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} \ \text{ for } n\to 0\right) \tag{8}$$

$$※\ p(x,t) = \left(\frac{Q^2}{at}\right)^{1/(n+2)} f(\xi) \longrightarrow \frac{Q}{2\sqrt{\pi a t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) \quad \text{for } n\to 0 \tag{9}$$

※ $T_{\max}(t_0) := T(x=0, t_0>0)$ による表式

$$\frac{\rho_0 R_g T_{\max}(t_0)}{\mu} = \left(\frac{Q^2}{at_0}\right)^{1/(n+2)}\left[\frac{1}{2}\frac{n\xi_0^2}{2+n}\right]^{1/n} \longrightarrow Q = \sqrt{\frac{at_0}{\rho_0}\left\{\frac{\rho_0 R_g T_{\max}(t_0)}{\mu}\left[\frac{1}{2}\frac{n\xi_0^2}{2+n}\right]^{-1/n}\right\}^{n+2}} \tag{10}$$

$$n\longrightarrow 0 \Rightarrow \frac{\rho_0 R_g T_{\max}(t_0)}{\mu} = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a t_0}} \Rightarrow Q = 2\sqrt{\pi a t_0}\frac{R_g}{\mu}T_{\max}(t_0) \tag{11}$$

※無次元化された方程式において、

$p \to p\rho_0 V_0^2$、$T \to TV_0^2/R_g$、$\kappa \to \kappa R_g \rho_0 V_0 L_0$ のとき

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (\gamma-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right) \to \frac{\partial p}{\partial t} = (\gamma-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{12}$$

esp. $\kappa = \kappa_0 T^n$ のとき、$\kappa_0 T^n \to \kappa_0 T^n R_g \rho_0 V_0 L_0 \ \therefore\ \kappa_0 \to \kappa_0 \rho_0 V_0^3 L_0 (V_0^2/R_g)^{-n-1}$ とすれば、

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (\gamma-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_0 T^n\frac{\partial T}{\partial x}\right) \to \frac{\partial p}{\partial t} = (\gamma-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_0 T^n\frac{\partial T}{\partial x}\right) \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \kappa_0(\gamma-1)\rho_0^{-n-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(p^n\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{13}$$