

TWO DIMENSIONAL NUMERICAL SIMULATION
OF RISING MAGNETIC FLUX TUBES
IN THE SOLAR ATMOSPHERE

修士論文

1979年 2月

柴田一成

京都大学理学部宇宙物理学教室

Abstract.

この論文の目的は、次の3つである。

(1) 太陽活動領域の進化の初期の描像を明らかにすること

(2) 速度場の観測から電流分布(Force-Free かじのずれ)を
推定する方法の探究

(3) 2次元MHDコードの開発

(1)には、磁束チューブの上昇という視点から観測事実が説明できる
ことが示唆され、(3)で“開発された2次元MHDコード”を用いて、その視点の
正しさを確認づけることが“試みられるが”多くの数値計算上の困難性のために、
まだ成功していない。(2)も示唆の域を出でていない。

preliminary simulation から得られた、いくらかの結論は最後に
述べられるが、この小文の真の意義は、目的を達成するための 1st step
を詳細に解説した、ということである。

CONTENTS

1. Introduction

- 1.1 The First Purpose---Evolution of Active Regions
- 1.2 The Second Purpose---Speculation of the Magnetic Fields
- 1.3 The Third Purpose---Numerical Simulation of the Two Dimensional Magnetohydrodynamics
- 1.4 Summary

2. Review of Observational Facts

- 2.1 An Overview of the Solar Atmosphere
- 2.2 Evolution of the Active Regions
- 2.3 Initial Phase of the Active Regions---Observational Evidence of Rising Magnetic Flux Tubes
 - 2.3.1 Photosphere and Lower Chromosphere
 - 2.3.2 Chromosphere and Inner Corona
 - 2.3.3 Corona
 - 2.3.4 Summary

3. Basic Equations

- 3.1 Assumptions
- 3.2 Equations of Magnetohydrodynamics

4. Mathematical Background

- 4.1 Mathematical Interpretation of MHD Equations
- 4.2 Characteristic Condition---Phase Velocity
- 4.3 Bicharacteristics---Wave Front
- 4.4 Generalization of Riemann's Method---Normal Form of Hyperbolic Partial Differential Equations
- 4.5 Mixed Initial and Boundary Value Problem

5. Numerical Method

- 5.1 Difficulties in Multidimensional Problem
- 5.2 Interior---Modified Lax-Wendroff Method
- 5.3 Boundary---Method of Compatibility Relation (CR Method)
- 5.4 Simplification of CR Method (SCR Method)

6. Numerical Result

- 6.1 Corona (Nakagawa et al.'s Case)
- 6.2 Photosphere and Lower Chromosphere (Simulation of Kawaguchi and Kitai's Observation)

7. Discussion

- 7.1 Reliability of MHD Code
- 7.2 Rising Magnetic Flux Tubes in the Corona
- 7.3 Rising Magnetic Flux Tubes in the Photosphere
- 7.4 Deviations from Current Free (or Force Free) Field
- 7.5 Summary and Conclusion

Acknowledgment

Appendix

References

§1. Introduction

1.1 オ1の目的—Evolution of the Active Regions

太陽外殻 (outer envelope) の大規模対流 (global convection) あるいは循環 (circulation) のダイナモ過程で形成された磁束は、磁気浮力 (magnetic buoyancy) によって、太陽表面に運ばれ、そこでさまざまな活動現象 (例えば、黒点、ポラージュ、プロミネンス、フレア… etc.) を引き起こす (図 1.1)。これらの活動現象がさかんな領域 (あるいは磁場の強い領域) は、活動領域 (Active Region; 以下 AR と略す) と呼ばれ、それ自身 数時間～数ヶ月 ($10^4 \sim 10^7$ s) の寿命をもつ非定常現象である。そのサイズ、形は個々の AR で大きく異なるが、平均的 AR では直径 $\approx 10^4 \sim 10^5$ km, 全磁束 $\approx 10^{22}$ Mx (= G · cm²) である。(Martres and Bruzec, 1977)。この論文では、オ1の目的として AR の進化、とりわけ誕生時 (磁束が光球面に現われたとき) から、成長期 (磁束がコロナに出現し、さらに増大しつつあるとき) にかけての初期の段階 (0 ~ 10^5 s) について考察する。

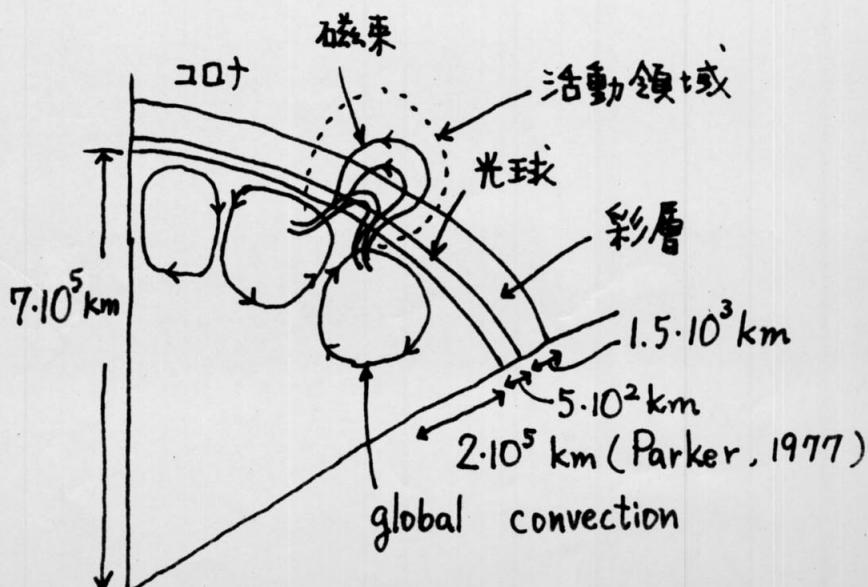


図 1.1 太陽外殻 及び 大気の構造

1.2 オ2の目的—Speculation of the Solar Magnetic Fields

§1.1 でも述べたように、さまざまな活動現象の原因を成しているのは磁場である。従って、「太陽大気中の活動現象の物理学において、最も基本的なパラメーターは磁場である」と言うことができる。このことは、太陽大気の各層における磁気エネルギー（または、磁気圧）と熱エネルギー（またはガス圧）を比較してみるとよくわかる。（表1.1）

表1.1 光球、彩層、コロナの物理量 (川口, 1978)

層	数密度(cm^{-3})	温度(K)	磁場(G)	熱エネルギー(erg/cm^3)	磁気エネルギー(erg/cm^3)
光球(静穏領域)	10^{15}	6000	1	800	0.04
" (活動 黒点)	10^{15}	4000	3000	500	$4 \cdot 10^5$
彩層(静穏 "	10^{13}	5000	1	7	0.04
" (活動 "	10^{13}	10000	50	14	100
コロナ	10^8	10^6	10	0.014	4

(表1.1 の彩層、コロナの磁場の値は推定値であり、文字通りに受け取るべきではないが、1ヶタや2ヶタも異なることはないであろう。従って、磁場の重要性にはかわりはない。大気の詳細なモデルについては §2 参照。)

このように、重要な量であるにもかかわらず、磁場の測定は現在の所、大部分光球面上の視線成分だけに限られており、磁場の存在と変化が原因になつていると推測されているさまざまな現象の物理学はまだあまりよくわからっていない。(

従って、普通はマグネットグラフによる直接測定（光球面上視線成分の測定）とともに、他の観測や理論的計算によって間接的に磁場構造を推定する方法がとられている。すなわち、

- (1) H_α, 日食またはコロナグラフの写真, 軟X線などによる直接像中のひも状の模様は磁力線に沿っていると考える。(物質は磁場に frozen in)
- (2) Current-Free (電流 $J=0$) や Force-Free (ローレンツ力 $F = \frac{4\pi}{c} J \times B = 0$) の仮定のもとに, 光球面上の視線成分を境界条件とする境界値問題を数値的に解く。
- (3) その他: 電波のアラテー回転から求める方法や, 圧力平衡から磁気圧を推定する方法, … etc.

などがおもな推定方法である。(1)は最もよく使われている方法であり、特に近年の軟X線の観測の進歩によってコロナの磁場構造がかなりよくわかつてきた。(2)の Current-Free については計算方法が確立しておりコロナの場合は、(1)の観測結果と大体一致する。しかし、Force-Free については、まだ計算方法が確立におりず、現在はフレアのエネルギー貯蔵と関連して多くの研究が進行中という状態である(Sakurai, 1977)

このように、多くの進歩はあるとはいうものの、上記の間接推定から得られる情報は、主として、静的(あるいは準静的)な現象理解にとどまつており(電磁流体静力学), 動的現象の解明にとては(電磁流体動力学)無力といわざるを得ない。例えば、(1)の方法からは磁場の方向が推定できただけで、強さがわからぬため、運動方程式中のローレンツ力に相当する項が未知であるし、(2)はそもそもの仮定が、静的、あるいは準静的、ということなのである。

そこで、この論文では、オ2の目的として、観測された速度場(これはかなり容易に、そして正確に求まる)から、磁場の構造、特に、Force-Free からのそれを推定する方法について考察する。

1.3 第3の目的—Numerical Simulation of Two-dimensional MHD

これまでに、くり返し述べてきたように、太陽活動現象の物理学においては磁場が本質的であり、さらに、動的現象の場合、流れの場と磁場が結合した電磁流体力学(MHD)が“基本となる。

のちに、示すように、このMHD方程式系は物理学に現われる多くの方程式系と同様 非線型の連立偏微分方程式であり、一般には解析的に解けない。しかし、最近の高速大容量の大型計算機の発達によって、数值的に扱えることが“可能になり、例えは”流体力学の場合は「Computational Fluid-dynamics」という独自の分野を形成するほどに数値シミュレーションが“さかんである(Roache, 1972)。MHDの場合は、流体力学の方程式系に加えて磁場の変与するだけ複雑になつてゐるのを、まだ、それ程さかんではない。MHDシミュレーションがなされているのは、主として核融合に関連するプラズマ物理学、太陽物理学などの分野である。

太陽物理学におけるMHDシミュレーションは、まだ始まつたばかりといえ、公表されているのは Nakagawa とそのグループ(Nakagawa et al. (1976), Steinolfson et al. (1978), Smith et al. (1977)), Hildner (1974), Weber (1978)である(いずれも空間2次元)。

この論文では、第3の目的とて、2次元MHDコードの開発と実際問題への応用、及びその際の問題点について述べる。

1.4. Summary

以上、3つの目的について述べてきたが、ここでもう一度まとると、次のようになる。

- (1) 活動領域の進化、特にその初期の描像
- (2) 観測された速度場から磁場構造、特に Force-Free からのずれを推定する方法の可能性
- (3) 2次元MHDコードの開発とその問題点。

具体的には、開発した2次元MHDコードを用いて、磁束 tube(2次元ではアーチである)が突然上昇を始め、以後も上昇し続ける、という場合を太陽大気の各層(コロナ、光球)についてシミュレートし、観測(Kawaguchi and Kitai (1976), など)との比較から目的(1),(2)を考察する。MHDコードの信頼性については、Nakayama et al. (1976)の結果が出せるかどうかでチェックした。(これはもちろん大きな問題が残る—詳しくは §5, §6, §7)

以下、この論文の構成について述べる。§2は、上昇する磁束チューブが太陽大気の各層ごとのような観測事実とてあらわれてきたかについてまとめ、最後に観測事実を総合したARの進化の描像も述べる。§3では、基礎方程式と仮定について説明し、§4で数値計算の基礎となる数学を述べ、§5において具体的な数値計算の方法と問題点を説明する。§6はシミュレーションの結果をまとめたもので、§7でシミュレーションの結果をもとにして3つの目的がどの程度達成されたか、及び、残された問題点について詳述する。

§2. Review of the Observations

2.1 An Overview of the Solar Atmosphere

最初に太陽大気の大まかな構造について概観する。大気は内部側から光球、彩層(下部、中部、上部)、遷移領域、コロナと名づけられており、その位置と物理量は図2.1、表2.1のようになる。また、静穏領域に存在する現象を図2.2に示す。

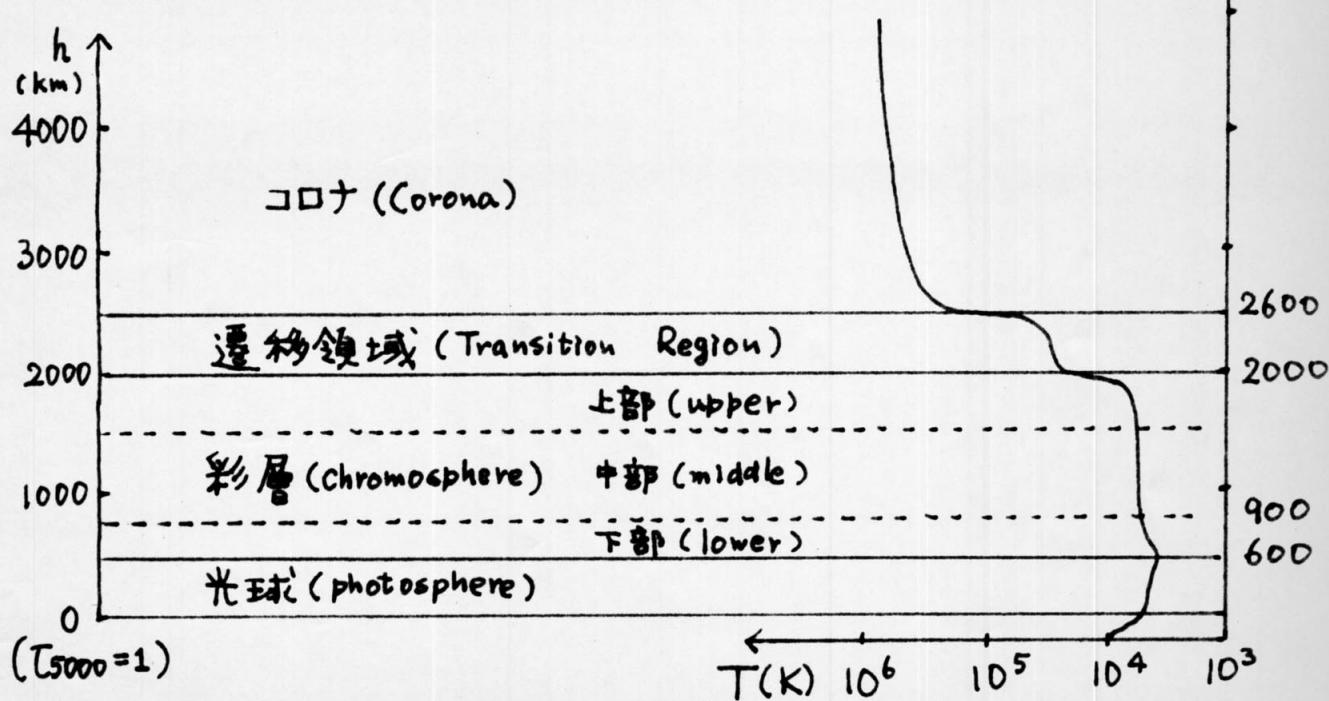


図2.1. 太陽大気各層と温度

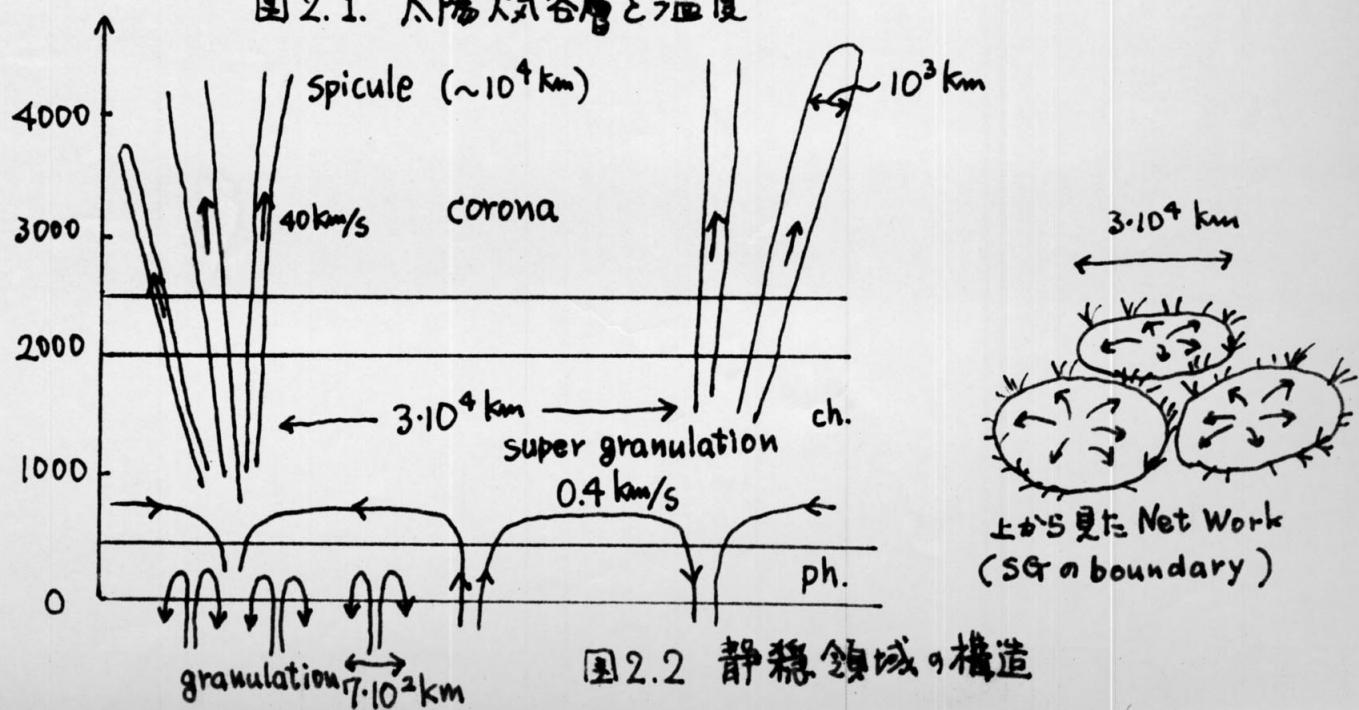


図2.2 静穏領域の構造

表2.1 太陽大気のモデル

層	高さ (km)	温度 (°K)	ガス圧 (dyn cm ⁻²)	質量密度 (g cm ⁻³)	電離度	T ₅₀₀₀	B (G)
光球	0	6390	1.31 E5	3.19 E-7	3.65 E-4	1	1000
	200	4890	2.7 E4	8.5 E-8	3.43 E-6	0.04	333
	400	4420	4.2 E3	1.46 E-8	4.6 E-7	0.0013	200
彩層	600	4360	5.6 E2	2.05 E-9	2.5 E-6	5.0 E-5	143
	800	5170	9.4 E1	2.8 E-10	5.36 E-4	1.26 E-5	111
	1000	5700	1.94 E1	5.2 E-11	3.97 E-3	5.01 E-6	91
	1200	6110	4.7 E0	1.17 E-11	1.72 E-2	3.16 E-6	77
	1400	6630	1.22 E0	2.65 E-12	7.9 E-2	2.00 E-6	67
	1600	7280	4.1 E-1	7.2 E-13	2.6 E-1	1.00 E-6	59
	1800	8170	1.8 E-1	2.34 E-13	5.13 E-1	1.58 E-7	53
	2000	25120	1.8 E-1	3.7 E-14	1.0		48
过渡	2500	800000	1.8 E-1	1.4 E-15	1.0		38
日冕	3000	900000	1.75 E-1	1.2 E-15	1.0		32
	6000	1000000	1.7 E-1	1.04 E-15	1.0		16
	30000	1600000	1.19 E-1	4.51 E-16	1.0		3

■ $0 \leq h \leq 1800$ HSRA モデル Gingerich et al. (1971)

$2000 \leq h \leq 6000$ Gabriel (1976)

その他 Allen (1973)

シミュレーションの初期条件として表2.1は用いられる。ここで磁場 B の値は2次元の bipolar field (つまり line source) の各高さにおける最大値が与えられる。つまり

$$B_x = \left[\frac{x+a}{r_1^2} - \frac{x-a}{r_2^2} \right] m \quad (2.1)$$

$$B_y = \left[\frac{y+b}{r_1^2} - \frac{y+b}{r_2^2} \right] m \quad (2.2)$$

但し、

$$r_1^2 = (x+a)^2 + (y+b)^2$$

$$r_2^2 = (x-a)^2 + (y+b)^2$$

$$b = 10^2 \text{ km}$$

$$a = 1.5 \cdot 10^4 \text{ km}$$

$$m = 10^5 \text{ km} \cdot G$$

の場合の $y=-\text{定}$ における最大値 $B_{\max} (= (B_x^2 + B_y^2)^{1/2} \max)$

$$B_{\max} = \begin{cases} y+b < a & a \text{ とき } \\ & \frac{m}{y+b} \\ y+b \geq a & a \text{ とき } \\ & \frac{2am}{a^2 + (y+b)^2} \end{cases} \quad (2.3)$$

である。図示すると、図2.3のようになる。ただし、実際のシミュレーションでは数値計算上の困難のために、(2.1), (2.2)は使わなかった (56)。

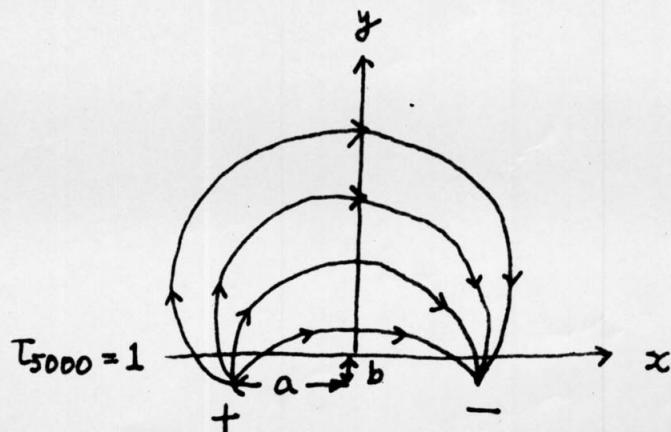


図2.3 2次元 bipolar magnetic field

2.2 Evolution of Active Regions

Introduction 1.1. でも述べたように、ARはそれ自身 時間的に変化する非定常現象である。その life time はおよそ 数時間～数ヶ月であるが、この節では、life time が“100日(10^7 s)ほどの AR の進化についてこれまでにわかつていることを述べる。(表2.2)

初期： AR の誕生(0s) は、磁束チューブが“光球面上に姿を現した瞬間”と定義する。しかし、この瞬間が観測的に確認されているというわけではない。その理由は、現在の観測技術の分解能の悪さ(白色光で“最も時に $0.2''$ – 140 km , マグネットグラフで“ $1''$ – 700 km)と、誕生時に観測している chance の低さなどによる。この誕生に続く数 10 sec ~ 数分についても同じことが言える。ただし、黒点の出現 1日前に、光球面の明るさに変化が生じるという報告があることをつけ加えておく(Korobova et al. 1968)。

誕生後の最初の観測的証拠は、H α 単色光における network boundary の brightening (chromospheric plage の誕生) である。これは、誕生後 数時間 (10^4 s) と考えられている。この後、マグネットグラフ上の出現 (bipolar といわれる), weak metallic line の redshift (photosphere ~ lower chromosphere での物質の downflow; Kawaguchi and Kital, 1976), 光球面における黒点の出現などを経て、約 1 日後 (10^5 s) Arch Filament System (AFS) が“upper chromosphere から inner Corona にかけて形成される(Bruzek, 1969)。AFS は H α 単色光による dark filament で、両足がマグネットグラフの opposite polarity にくついていると同定されていることなどから、磁力線の形を表わしていると考えられ、磁束チューブの Coronaへの突入時とみられる。さらに最近の Soft X-ray による Corona の観測では、AFS を伴う H α plage の出現後 3 時間以内に bright point が出現するという(Wolfson et al. 1977)。この時期 (0s ~ 10^5 s)

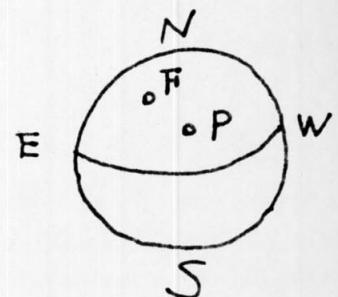
までを AR の初期 (Initial Phase) と名づけ、次の節 (§2.3) で詳しく述べる。

成長期 ; AFS が出現する期間は 2,3 日続きこの時期 ($10^5 \sim 4 \cdot 10^5$) を成長期 (Growing Phase) と呼ぶことにする。誕生後約 2 日後には黒点 (下) が出現する。(すでに出現していたのは 黒点 (P) であった。) ここで P, F とは Preceding (西向き), Following (東向き) の略である。この段階では、半暗部 (penumbra) はまだなく、Pore と呼ばれることがある。3 日後には 黑点 (下) に、4 日後には 黑点 (P) にそれぞれ半暗部が形成され、ようやく一人前の黒点となる。

このころから、両黒点 (下と P) の間に多くの小黒点が出現し始め、Filare 活動がさかんになる。またループ状の Coronal Condensation が "H α , $\lambda 5303$ (green line)" で見えてくるのもこの時期である。マグネットグラフによる成長期を通じて 磁束は $10^{16} \text{ Mx s}^{-1}$ で増大する。

活動期 ; 誕生以来、5 日～12 日頃に黒点群が最大になり、フレア活動は最も激しくなる。この時期を活動期 (Active Phase) と呼ぶ。この期間においても 磁束は増大し続け、H α plage の明るさも増大し続ける。コロナでは、Condensation が "H α , $\lambda 5303$ だけではなく $\lambda 5694$ (yellow line), 白色光で見える。また、フレア活動に関連した violent motion も発生する。

衰退期 ; 黒点が消滅し始めたときから、すべての活動現象がなくなるまでの期間 (13d - 100d) を衰退期 (Decaying Phase) と呼ぶ。13-30d の間に 黒点 (下) はすべて消滅し、残りの黒点 (P) は 60d までにゆくなり消える。また、13d 頃から stable filament (quiescent prominence) ($5 \cdot 10^4 \text{ km}$) が 磁気中性線に沿って出現し、以後長さを増大し続ける。磁束はこの期間のはじめに最大となり、以後減少



する。それにともなってフレア活動も減少し、Coronal Condensation, H α 及び Ca plage などの明るさも減少し始める。100dまでに、すべての黒点・plage が消滅し、これをもって AR の死とすると。(しかし、neutral filament は依然として存在し、しかも、この比喩長さが最も長になる。また、マグネットグラフによる磁場もまだ検出でき、filamentとともに、この後 250d くらいまで生き残る。)

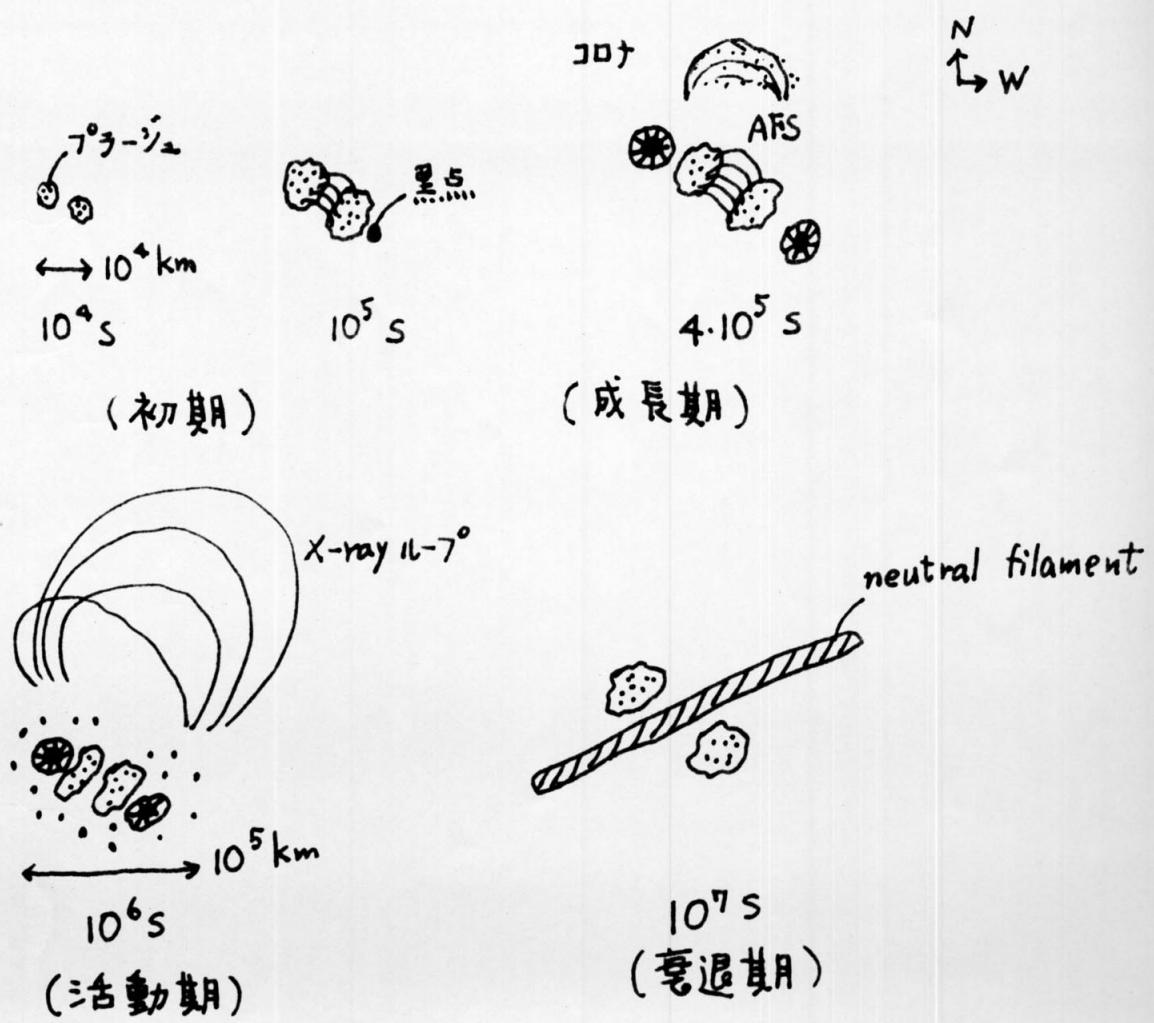


図2.4 ARの進化

表2.2 Evolution of Active Regions

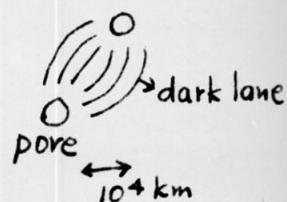
12

	時間 (sec)	Photosphere	Chromosphere	Corona
初期	10^3	. granular dark lane		
	10^4	. downflow . 黒点(P)出現 . small bipolar field (マグネットグラフ)	. H _a plage の誕生	
	10^5 (1d)		. AFS 出現	. Soft X-ray bright point
成長期	(2d)	. 黒点(下)出現		. $\lambda 5303$, 白色光で明るさが増す
	(3d)	. 下に半暗部出現	. 最初のフレア出現	. X-ray burst しばしば発生 . $\lambda 5694$ で見出す
	(4d)	. Pに半暗部出現	. AFS 消滅	. Condensation 出現 (H _a , $\lambda 5303$)
活動期	(5d- 12d)	. 多くの小黒点発生 . 黒点群最大	. plage の明るさ増大	. H _a , $\lambda 5303$, $\lambda 5694$ 白色光で Condensation
	10^6	. マグネットグラフ上のARの面積は増大している	. フレア活動最大	や violent motion が見られる . X-ray 1ル-7°が見られる
衰退期	(13d- 30d)	. 磁束最大 . 黒点(P)以外はすべて消滅	. stable filament 出現	. 白色光では明るさがヘリ出す
	(30d- 60d)	. 残りの黒点がゆきり消え	. plage の明るさヘリ出す . filament の長さ増大 (10^5 km / 27 day)	. $\lambda 5303$ の明るさ減少が開始
	(60d- 100d) 10^7	. 磁場はまだある (マグネットグラフ)	. plage 消滅 . filament の長さ最長 ほとんび赤道に平行	

2.3 Initial Phase of Active Regions -- Observational Evidence of Rising Magnetic Flux Tubes

2.3.1 Photosphere and Lower Chromosphere

Dark lanes in the photospheric granulation pattern : Bray and Loughhead (1964)は、成長期にある、2つの sunspot pore 間の granulation には、pore を結ぶ“形の dark lane が生じる”という報告をしている。(その life time は約3時間)。彼らは、この dark lane が上昇しつつある磁力線を表わしているのではないかと考えた。その後、Korobova et al. (1968) は、光球面の明るさの測定から、黒点発生の1~2日前に Bray らのような dark lane が存在すると報告した。しかし、dark lane と黒点発生の関係の詳細については、まだよくわかっていない。



Downflow in the photosphere and the lower chromosphere : Kawaguchi and Kitai (1976) の観測によると、黒点の誕生前に弱いフランツーファー線に小さな redshift が生じる。これは、photosphere から lower chromosphere にかけての物質の down flow を示すもので、彼らはその大きさを精密に測定して、最大で 1.5 km s^{-1} という値を得た(表2.3)。速度場の life time は少くとも 1 時間であり、サイズは $5 \cdot 10^3 \text{ km}^2$ である。彼らは、この downflow を磁力線の上昇とともに落ちあがられた光球の物質の重力によるすべり落ち(sliding down)であると解釈した。

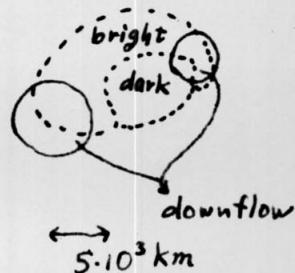


表 2.3

波長	effective height	descending velocity
4384 Å	1124 km	1.6 km/sec
4603 Å	524	0.6
5227	785	0.8
5250	311	0.3

2.3.2 Chromosphere and Inner Corona

Arch Filament System (AFS): §2.2 でも述べたように、黒点の誕生、成長にともなって upper chromosphere から inner Corona にかけて AFS が形成される。その高さは 10^4 km 以下、長さは 約 $3 \cdot 10^4$ km であり (図2.5) その頂上は 10 km s^{-1} で上昇し、足元は 50 km s^{-1} で下降する。1つの Arch

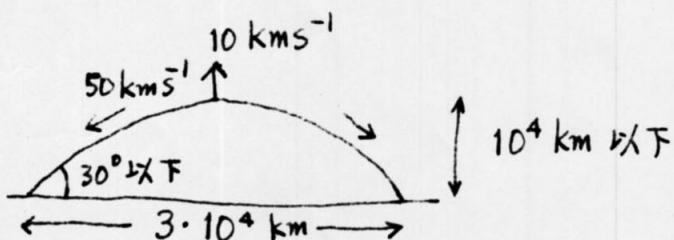


図 2.5 Arch Filament



図 2.6 AFS

Filament の life time は約 30 min で、この Arch Filament が 2~3 日間出没し続ける。(AFS とは、AF の出没する領域の総称である(Bruzek, 1967, 1969)) さらに、10々の Arch Filament の足元は opposite polarity にくっついていることなどから(図2.6)、AF は上昇しつつある磁力線を表していると考えられている。Frazier (1972) は、Filament の長さ ($3 \cdot 10^4$ km) が "supergranulation の直徑に大体等しいこと" から、super-granular flow (0.4 km s^{-1}) で運ばれた magnetic knot (10^3 km, $2 \cdot 10^3$ G) が network boundary に集積した結果、黒点(pore)を形成し、その後磁力線が膨張して AFS を形成するという empirical

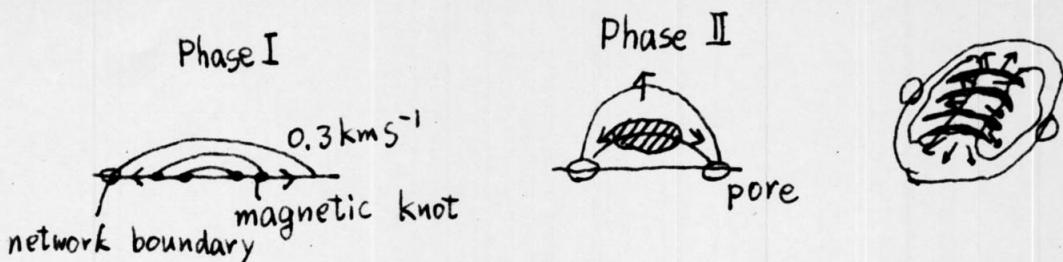


図2.7 FrazierのAFS model

modelを提唱した(図2.7)。ただし、このmodelが“広く受け入れられている”わけではなく、例えばBorn(1974)のようにAFSはnetwork boundaryに沿ってできるという報告がある。さらに、AFSとporeのどちらが“先にできるか”についても、くいちがう2つの観測がある(Born, 1974, Harvey and Martin, 1973)。しかし、ARの最初のplageが“network boundaryに出現すること(§2.2)などから考えて、supergranular flowと黒点、AFSの形成とは密接な関係がある”というのが多くの観測家の一致した考え方である。

2.3.3 Corona

Soft X-ray bright point: 最近のX-ray観測技術の発展によって、コロナにおけるARの初期の進化についても少しずつわかり出してきた。ここではその最初で最新の報告であるWolfson et al.(1977)の結果を述べる。1.5 keV - 30 keVのSoft X-ray emissionはHαでのAFS出現後3時間以内に発生し、そのサイズは 10^4 km(体積 10^{12} km³)、electron density 10^{10} cm⁻³、温度 3×10^6 Kである。X-rayの強さは誕生後2日にわたり多くのburstをともないながら増加する。注目すべきなのは、最初の半日ごさえ、フレアによく似たimpulsive heating(burst)があることである。このことから「磁場はねじ曲げられた複雑な形状でコロナに出現する可能性がある」と彼らは述べている。

2.3.4 Summary

以上の観測事実から、ARの進化の初期の描像を磁束チューブの上昇という視点からまとめてみると、次のようになる。

対流層で形成された磁束チューブは、磁気浮力などによって光球面に姿を現わし、そのとき、granulation に disturbance を与え、これが“dark lane”として観測される。このようにして出現した磁束チューブは supergranular flow によって network boundary にかき集められ、全磁束がかなりな大きさになたときに、磁場の存在による heating の強化によって、chromospheric plage や “bright point” として出現する。かき集められた磁束は、さらによせられてくる磁束チューブなどの影響もあって、photosphere から chromosphere へと膨張する。このとき photosphere の重い物質 ($10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$) が磁力線にくついて (frozen in) もちあげられるので、物質は chromosphere に突入した塊から、重力のため磁力線に沿って足元の方へすべり出す。(photosphere では水平に近かった磁束チューブが chromosphere では、かなりわん曲するようになるためである。) チューブの上昇速度は観測にかかるほど“小さい (0.5 km s^{-1}) ので、下降速度も小さい (最大 1.5 km s^{-1})。このチューブはさらに上昇を続け、 10^4 s (3h) $\sim 10^5$ (1d) 経過した塊にはコロナに突入する。(光球—コロナ間距離は $3 \cdot 10^3 \text{ km}$ なので、上昇速度は $0.3 \text{ km s}^{-1} \sim 0.03 \text{ km s}^{-1}$ と見積もることができる。) この塊のチューブの足元はすでに行なわれたすべり落ちの結果、密度は通常の大気より高い状態で平衡 (quasi-magnetostatic equilibrium) を保ち、もはや光球—彩層付近での下降流は見られない。新たにかき集められつつある磁束も、最初の先頭集團とは明らかに違う状況にある (上部に強い磁束が存在する) ので、上昇速度は先頭集團に比べて小さいと

考えられる。このために、これらの後続の磁束チューブ"による光球-影層付近の下降流はあるとしても非常に小さくて観測にかからない。そして集められた磁束が" 10^{20} Mx を越えると現に、光球面に黒点(pore)が見えてくる。一方、コロナに突入した先頭集團は、影層からコロナにかけての密度、ガス圧の急激な減少のために、膨張速度の加速が起りて、 10 km s^{-1} で上昇する。このとき、再び影層中の物質 ($10^{-11} \text{ g cm}^{-3}$) をもちあげて、重力のためにすべり落とす (50 km s^{-1} の落下速度)。これが" Arch Filament である。さらに物質を落としてしまうと重力による束縛力がなくなり、磁束チューブはさらに速い速度(数 10 km s^{-1})でコロナ中を膨張する。このときのコロナ中の運動の結果、高密度 ($10^{-14} \text{ g cm}^{-3}$)、高温度 ($3 \cdot 10^6 \text{ K}$) のループを形成し、これが" Soft X-ray 1=5, 2 bright point として見える。ここまでが、ARの進化の初期の描像である。

後続集團の磁束チューブ"は、先頭集團の速い上昇速度(数 10 km s^{-1})のおかげで、あまり妨害は受けず、やはり AFS を形成して、物質を落としたのちコロナ中へと膨張する。このようにして、対流層から磁束チューブ"の供給があり、かつ、コロナ中の磁場が"準平衡状態を達成して後続の上昇磁束チューブ"を妨害するようになると" Arch Filament が出現する。この準平衡状態が"達成されるのが、磁束の光球面上への出現後 約 $4 \cdot 10^5 \text{ sec}$ (4 day) である。(以上が成長期)

これ以後、AFS はなくなるが、磁束の供給は依然として続くので"初期、成長期とは質的に異なる現象、すなわち、すでに存在する磁束と新しく出現した磁束との相互作用 — reconnectionなど — によってフレアをはじめとする種々の活動現象がさかんになる。そして、磁束の供給がなくなた時点が活動期の終り、というわけである。

§3. Basic Equations

3.1 Assumption

- (1) 太陽大気においては、通常電気伝導度は非常に大きい ($\sigma = 10^{13} \sim 10^{14} \text{ sec}^{-1}$) ので $\sigma = \infty$ と仮定する。
- (2) Coronaにおけるシミュレーションは adiabatic を仮定。これは、あまり現実的でないが、Nakagawa et al. (1976) がこの仮定の元で計算しているので、才一段階としてこれを採用した。現実的なものに近づけるには、energy eq. に radiative cooling, mechanical heating, heat conduction の項を付け加えなければならない。
- (3) Photosphereでは、温度が高さの函数として与えられているものと仮定する。これは、radiative relaxation time が "photosphere" で 1 sec の order であることから正当化される (Spiegel, 1957, Stix, 1970)*。
- (4) 空間2次元を仮定。これは主として、数値計算上の困難によるが、実際の現象中にも2次元的構造をなすものがある (例えば、AFSは かまぼこ型である)。
- (5) viscosity は無視する。

* (3)の photosphere の場合、温度が高さの函数として与えられると、energy eq. が必要なくなる。つまり、未知数が一つへる。すなわち、

$$\frac{P}{\rho} = \text{given}$$

となり、未知数は (P, u, v, B_x, B_y) である (notation については §3.2)。

3.2 Equations of Magnetohydrodynamics

$\sigma = \infty$ で、adiabatic の場合の MHD 方程式系は次のようになる。

mass conservation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1)$

momentum conservation $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p - \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{B}) - \rho g = 0 \quad (3.2)$

energy conservation $\frac{d}{dt}(\rho \rho^\gamma) = 0 \quad (3.3)$

induction equation $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (3.4)$

ただし、
 $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$

ρ : mass density (g cm^{-3})

p : pressure (dyn cm^{-2})

\mathbf{B} : magnetic field (Gauss)

\mathbf{v} : velocity (cm s^{-1})

γ : specific heat ratio

g : gravitational acceleration

(注) $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ は explicit に必要でない。なぜなら (3.4) の div を

とることにより

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{B}) = \operatorname{div} \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \equiv 0$$

よって、最初に $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ である限り常に $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ となるからである。

これらの方程式を2次元直角座標(x, y)の場合に各成分ごとに書きくだす。その際、数値計算上の便宜のため、方程式を保存形に書き変える。(3.5参照)

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(P u) + \frac{\partial}{\partial y}(P v) = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(P u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(P u^2 + P + \frac{B_y^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(P u v - \frac{B_x B_y}{4\pi}\right) = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(P v) + \frac{\partial}{\partial x}\left(P u v - \frac{B_x B_y}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(P v^2 + P + \frac{B_x^2}{8\pi} - \frac{B_y^2}{8\pi}\right) + Pg = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(v B_x - u B_y) = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u B_y - v B_x) = 0 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{P}{\gamma-1} + \frac{P}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{8\pi}(B_x^2 + B_y^2)\right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}uP + \frac{Pu}{2}(u^2 + v^2) + \frac{B_y}{4\pi}(u B_y - v B_x)\right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}vP + \frac{Pv}{2}(u^2 + v^2) + \frac{B_x}{4\pi}(v B_x - u B_y)\right] + \\ & + Pg v = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

ただし、 $\mathbf{U} = (u, v)$

$\mathbf{B} = (B_x, B_y)$

$\mathbf{g} = (0, -g)$

単位はすべて CGS Gauss である。

§4. Mathematical Background

4.1 Mathematical Interpretation of MHD eqs.

この節では、§3で述べたMHD eqs. の数学的意味および性質について述べる。そのためには、(3.5)~(3.10)を次のように変形する。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + p \frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{B_y}{4\pi\rho} \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} + g = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + u \frac{\partial B_x}{\partial x} + v \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_y \frac{\partial u}{\partial y} + B_x \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + u \frac{\partial B_y}{\partial x} + v \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_y \frac{\partial u}{\partial x} - B_x \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.6)$$

ただし、(4.4), (4.5)を導く際に

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

を利用した。

(4.1)~(4.6)は

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ B_x \\ B_y \\ p \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$A = \begin{bmatrix} u & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \frac{B_z}{4\pi p} & \frac{1}{p} \\ 0 & 0 & u & 0 & -\frac{B_x}{4\pi p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} v & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & -\frac{B_z}{4\pi p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{B_x}{4\pi p} & 0 & \frac{1}{p} \\ 0 & -B_y & B_x & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 & 0 & v \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

とすると、

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x} + B \frac{\partial w}{\partial y} + C = 0 \quad (4.11A)$$

あるいは

$$(I \frac{\partial}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y}) w + C = 0 \quad (4.11B)$$

と書ける。ただし、

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} : 6 \text{次元単位行列}$$

この方程式 (4.11A または B) は、未知変数 (従属変数) が "w"、つまり (p, u, v, Bx, By, γp) であり、A, B は w に依存しているので非線型である。しかししながら、A, B は 独立変数 (t, x, y) に関する

微分 $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ に依存していない。

一般に, m 個の未知数 w_1, \dots, w_m , n 個の独立変数 x_1, \dots, x_n からなる次の一階の非線型連立偏微分方程式

$$\sum_{i=1}^n A_{ii} \frac{\partial w}{\partial x_i} + C = 0 \quad (4.12)$$

$$w = [w_1, \dots, w_m]^t$$

$$C = [C_1, \dots, C_m]^t \quad (\text{定ベクトル})$$

$$A_{ii} = m \text{ 次元正方行列}$$

において, A_{ii} が $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ に依存していないとき, つまり, (4.12) が " $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ に依存しない" 線型のとき, (4.12) は 準線型 である, という。

従って, 我々の方程式 (4.11A) は, 未知数 6 ($m=6$), 独立変数 3 ($n=3$) の一階 準線型連立偏微分方程式 である。

次の §4.2 では, (4.11A) が "双曲型" であることが示され, §4.3 及び §4.4 で "双曲型 準線型 偏微分方程式の一般的性質" 及び, 我々の (4.11A) の場合の具体例を示す。最後に我々の問題が, 混合初期値境界値問題 になることを述べる (§4.5)。

4.2 Characteristic Condition — Phase Velocity

(4.12) は

$$A_{i,jk} \frac{\partial w_k}{\partial x_i} + C_j = 0 \quad (4.12')$$

とも書ける。パラメータ ξ_i ($1 \leq i \leq n$) を導入して、 x_i 座標系から ξ_i 座標系への変換を考える。つまり、

$$x_i = x_i(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \xi_i = \xi_i(x_1, \dots, x_n) \quad 1 \leq i \leq n$$

ただし、
 $\det \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \right) \neq 0$

このとき、 n 番目の新しい座標 ξ_n (これを以後 φ とする) を、(4.12') からは $\frac{\partial w_k}{\partial \varphi}$ が一意的に決定できないという条件で決める。このとき、 $\varphi = \text{一定}$ の曲面 (多様体) を $n-1$ 次元 特性曲面 (多様体) という。特性曲面を初期曲面に選ぶと、($x_i = x_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \varphi)$, $w_k = w_{k0}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$), $\frac{\partial w_k}{\partial \xi_i}$ ($1 \leq i \leq n-1$) は初期条件より決まっているが、 $\frac{\partial w_k}{\partial \varphi}$ は (4.12') より一意的に決まらないので、解を任意の方向 ($\frac{\partial w_k}{\partial \varphi}$ が 任意) に積分できる。つまり、特性曲面は分歧曲面 (あるいは不連続面) になりうる (Courant and Hilbert, 1962)

以上のことを定式化する。

$$\frac{\partial w_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial w_k}{\partial \varphi} + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_i} \frac{\partial w_k}{\partial \xi_s}$$

を (4.12') に代入すると

$$A_{i,jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial w_k}{\partial \varphi} + \dots = 0$$

$\frac{\partial w_k}{\partial \varphi}$ が一意的に決定できないためには

$$\det \left(A_{i,jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (4.13)$$

となることが必要十分。(4.13)を 特性条件 (Characteristic Condition) という。

(4.13) が定値形式のとき、すなわち、実の特性曲面をもたないとき、元の方程式 (4.12') を 橢円型 といい、不定値形式のとき 双曲型 という。

我々の問題 (2次元 MHD eqs.) では

$$\det(A_{ij}, jk \frac{\partial \varphi}{\partial x_i})$$

$$= \det(\mathbb{I}\varphi_t + A\varphi_x + B\varphi_y)$$

$$= \det \begin{vmatrix} \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y & p\varphi_x & p\varphi_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y & 0 & -\frac{B_y}{4\pi\rho}\varphi_y & \frac{B_x}{4\pi\rho}\varphi_x & \frac{\varphi_x}{\rho} \\ 0 & 0 & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y & \frac{B_x}{4\pi\rho}\varphi_y & -\frac{B_x}{4\pi\rho}\varphi_x & \frac{\varphi_y}{\rho} \\ 0 & -B_y\varphi_y & B_x\varphi_x & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y & 0 & 0 \\ 0 & B_y\varphi_x & -B_x\varphi_x & 0 & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y & 0 \\ 0 & \delta p\varphi_x & \delta p\varphi_y & 0 & 0 & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y \end{vmatrix}$$

$$= V^2 [V^4 - (\nabla\varphi)^2 (v_s^2 + v_A^2) V^2 + (\nabla\varphi)^2 v_s^2 (v_A \cdot \nabla\varphi)^2] \quad (4.14)$$

$$= 0$$

となる。ただし、

$$V \equiv \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y \equiv \varphi_t + \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi$$

$$v_s^2 = \frac{\delta p}{\rho} : \text{音速}$$

$$v_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho}, \quad v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} : \text{Alfvén velocity}$$

$$\varphi_t \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \varphi_x \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi_y \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

(4.14) は 因数分解 できて、

$$V = 0, \pm C_f |\nabla\varphi|, \pm C_s |\nabla\varphi| \quad (4.15)$$

ただし、

$$C_f^2 = \frac{1}{2} [(v_s^2 + v_A^2) + \sqrt{(v_s^2 + v_A^2)^2 - 4v_s^2 (v_A \cdot \mathbf{n})^2}] \quad (4.16)$$

$$C_s^2 = \frac{1}{2} [(v_s^2 + v_A^2) - \sqrt{(v_s^2 + v_A^2)^2 - 4v_s^2 (v_A \cdot \mathbf{n})^2}] \quad (4.17)$$

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$$

となるので、(4.14)は 不定値形式、つまり元の2次元MHD eqs. (4.11A)は 双曲型であることがわかった。

一般に、準線型双曲型方程式は、我々の問題のように、

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} + C = 0 \quad (4.19)$$

と書くことができる、この特性条件は

$$\det(\mathbb{II}\varphi_t + A_{ij}\varphi_{x_i}) = 0 \quad (4.20)$$

である。このとき

$$\lambda \equiv -\frac{\varphi_t}{|\nabla \varphi|} \quad (4.21)$$

を、法線速度または特性速度と呼ぶ。これは、物理的には位相速度に対応している。(4.21)で定義された λ は (4.20)の変形からわかるように

$$\det(n_i A_{ij} - \lambda \mathbb{II}) = 0 \quad , n_i \equiv \frac{\varphi_{x_i}}{|\nabla \varphi|}$$

$n_i A_{ij}$ の固有値である。

我々の問題の特性速度 λ は、(4.15)~(4.17)より

$$\lambda_1 = \lambda_2 = u \cdot n \quad (4.22)$$

$$\lambda_{3,4} = u \cdot n \pm C_f \quad (4.23)$$

$$\lambda_{5,6} = u \cdot n \pm C_s \quad (4.24)$$

となる。このように 特性速度は 6つあり、これは元の方程式の未知数が 6つあることに対応している。(4.22)~(4.24)の物理的解釈は次のようになる。

(4.22) 流れの位相速度

(4.23) MHD wave fast mode の位相速度

(4.24) MHD wave slow mode の位相速度

ただし、(4.23), (4.24)は 流れによる ドップラー効果 の項 $u \cdot n$ を含んでいる。(4.23)(4.24)を 図4.1 に示す。

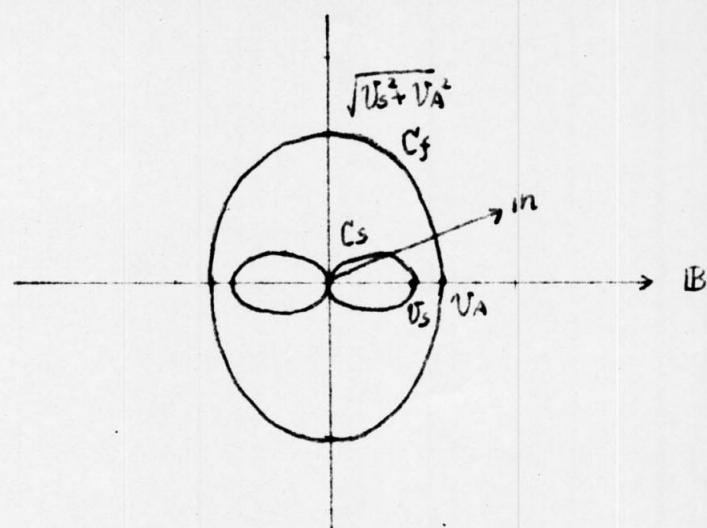
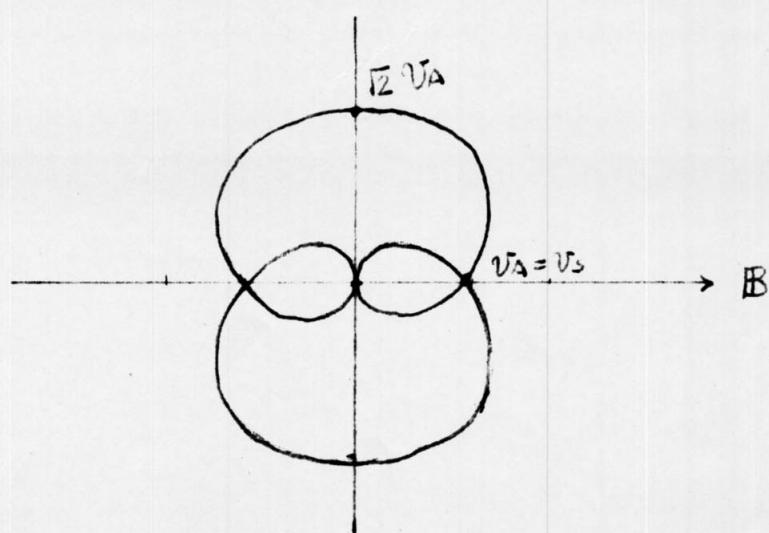
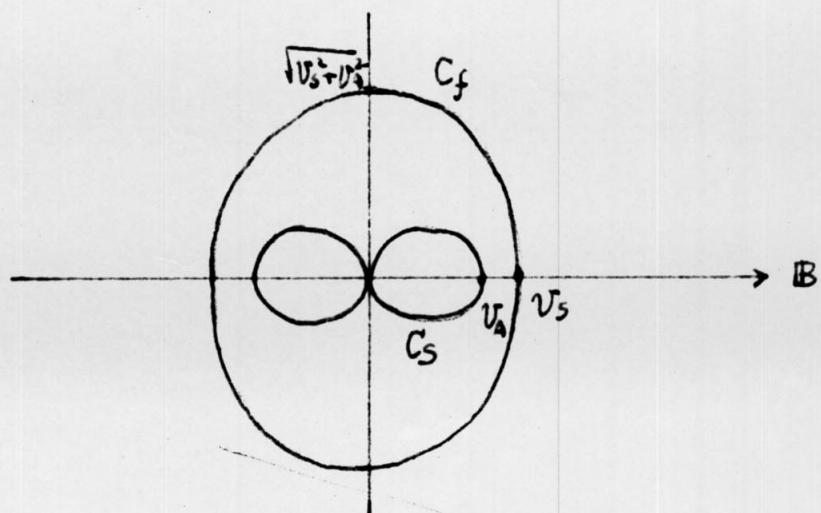
(a) $V_A > V_S$ のとき(b) $V_A = V_S$ のとき(c) $V_A < V_S$ のとき

図 4.1 MHD Wave Phase Velocity

4.3 Bicharacteristics — Wave Front

この節では、特性曲面の具体的な形とその物理的意味について述べる。§4.2で示されたように、特性曲面とは、(4.13)を満足する $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ =一定なる曲面である。(4.20)の形の場合で論すると、 φ を決める方程式は(4.21)

$$\lambda = -\frac{\varphi_t}{|\nabla \varphi|} \quad \text{または} \quad \varphi_t + \lambda |\nabla \varphi| = 0 \quad (4.21')$$

である。この(4.21')は1つの未知数 $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ についての一階の非線型偏微分方程式である(λ が $\nabla \varphi$ の値に応じて“準線型”ではない)。

一般に、未知数 $1_T(u)$ 、独立変数 $n_T(x_1, \dots, x_n)$ の一階偏微分 eq.

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (4.22)$$

$$\text{ただし, } p_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

は、パラメータ s についての、 $2n+1$ の関数 x_i, u, p_i に対する連立常微分 eq.

$$\frac{dx_i}{ds} = F_{p_i}, \quad \frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -(F_{x_i} + F_u p_i) \quad (4.23)$$

と同値である。(4.23)は特性連立微分方程式と呼ばれる。

(4.23)をみたす曲線 $x_i = x_i(s)$ を(4.22)の特性曲線といふ。(4.22)と(4.23)の関係は、§4.2の(4.12')と(4.13)の関係と同等である。)

(4.21')について、(4.23)を求めてみる。ただし、

$$x_n = t, \quad u = \varphi, \quad p_n = -\omega (= \varphi_t), \quad p_i = k_i (= \varphi_{x_i}) \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

とする。

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad (4.24)$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial}{\partial k} (\lambda k) \quad (4.25)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{\partial}{\partial t} (\lambda k) \quad (4.27)$$

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{\partial}{\partial x} (\lambda k) \quad (4.28)$$

ただし、 $k \equiv |k|$,

ここで、 $\Psi_t = -\omega$, $\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = k_i$ とおいたのは、 ω , k_i がそれぞれ角振動数、波数ベクトルと物理的に解釈されるからである。それは (4.21') が

$$\lambda = \frac{\omega}{k} \quad (4.29)$$

となることからわかる。さて、このことを念頭に置いて (4.24)~(4.28) を見直しめる。まず (4.24) より、パラメータ s と t を採用するのが便利なことがわかる。もしくは (4.25) は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial(\lambda k)}{\partial k} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (4.30)$$

となる。(ここで、 ω はもはや (4.22) におけるような独立変数ではなく $\omega = \lambda k$ を通じて k の関数となっている。) このとき

$$u_r \equiv \frac{dx}{dt} \quad (4.31)$$

を射線速度といい、物理的には群速度を表わす。

(4.26) は (4.21') の特性曲線に沿って Ψ が一定であることを示す。一方、特性曲面上で $\Psi = -\text{一定}$ である (§4.2)。このことから、(4.21') の特性曲線は、元々の方程式 (4.19) の特性曲面上にのっていることがわかる。この (4.21') の特性曲線を (4.19) の 特性射線 または 陪特性曲線 (Bicharacteristics) と呼ぶ。言いかえれば、特性射線は (4.24)~(4.28) で定義される曲線である。

(4.28) は

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \lambda}{\partial x} k = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (4.32)$$

となり、(4.30) (4.31) は幾何光学 (または、幾何音響学) における光線 (または音波の射線) を表す方程式に一致することがわかる。以上のことから、 Ψ は アイコナール (波の位相) と解釈でき、(4.21') はアイコナール方程式と同種のものと理解できる。このことは、アイコナール方程式の元の 波動方程式 が (線型) 双曲型方程式であることからの帰結である。

(4.27) は

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\lambda k_e) = \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (4.33)$$

となって、定常状態 ($\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$) では 脱線に沿て振動数が一定のままであることを示す(ランダウ・リフシツ 流体力学2, 1972)。

これらのことから、特性曲面 $\Psi(t, x_1, \dots, x_{n-1}) = \text{一定}$ とたむかの平面との交線は波面を表わしていることがわかり(図4.2), 特性射線は、群速度の伝播線であるといふことがわかる。

さて、我々の問題(2次元 MHD eqs.)にこれらを適用して、特性曲面の形、特に波面の形について調べてみよう。我々の問題では、(4.21')における λ_1 が (4.22)~(4.24) で与えられていた。

i) $\lambda_1 = \lambda_2 = v \cdot n$ の場合 (4.22)

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (4.34)$$

(これは、流線を表わしている。)

ii) $\lambda_{3,4} = v \cdot n \pm C_f$ の場合 (4.23)

$$\frac{dx}{dt} = v \pm C_f n \mp \frac{v_s^2 (v_n \cdot n) (v_n - (v_n \cdot n)n)}{C_f \sqrt{(v_s^2 + v_n^2)^2 - 4v_s^2 (v_n \cdot n)^2}} \quad (4.35)$$

iii) $\lambda_{5,6} = v \cdot n \pm C_s$ の場合 (4.24)

$$\frac{dx}{dt} = v \pm C_s n \pm \frac{v_s^2 (v_n \cdot n) (v_n - (v_n \cdot n)n)}{C_s \sqrt{(v_s^2 + v_n^2)^2 - 4v_s^2 (v_n \cdot n)^2}} \quad (4.36)$$

(4.35), (4.36) はそれぞれ fast mode, slow mode の群速度である。これらを 図4.3 に示す。図4.4 には特性曲面を示す。

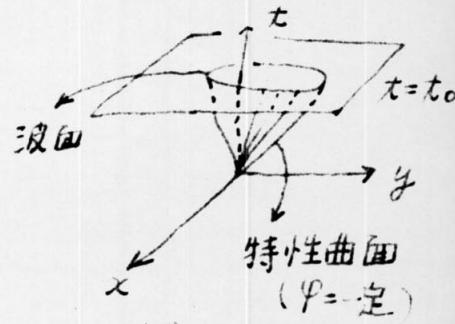


図4.2

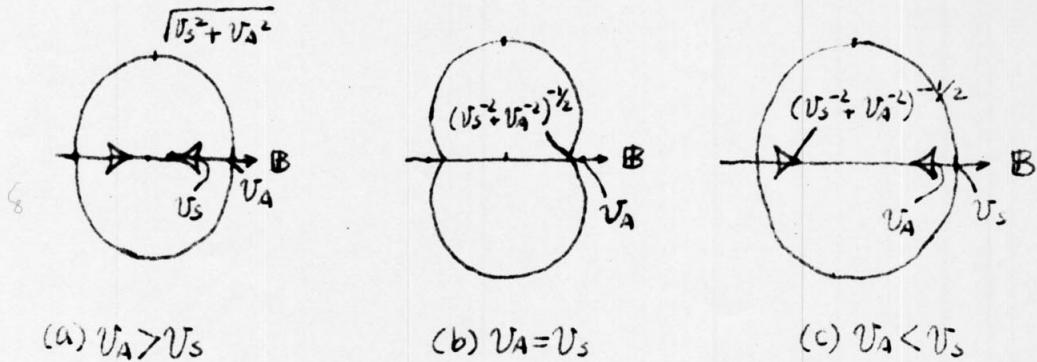


図 4.3 MHD Wave Front

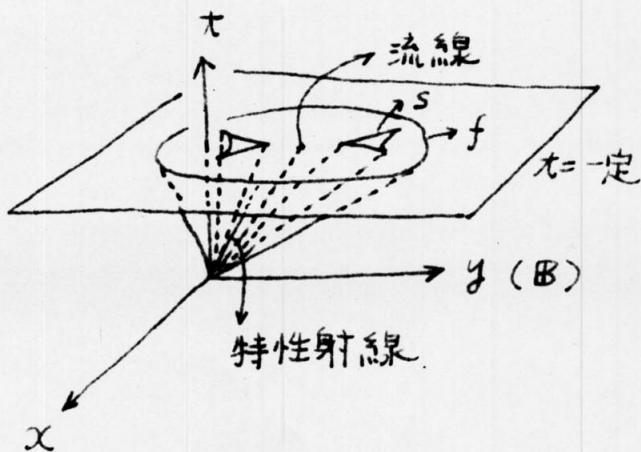


図 4.4. MHD Wave 特性曲面

なお、特性曲面は図 4.4 に示したように、錐面 (cone) 状になり、特性錐面とも呼ばれる。特性射線は錐面上にある。

図 4.1 (位相速度)と図 4.3 (波面)とは、幾何学的に簡単な関係があり、 $\mathbf{m} = (\cos\theta, \sin\theta)$ 方向の位相速度平面波の包絡面 (θ をパラメータとして動かしてできた包絡面) が“波面”となる。(図 4.5)

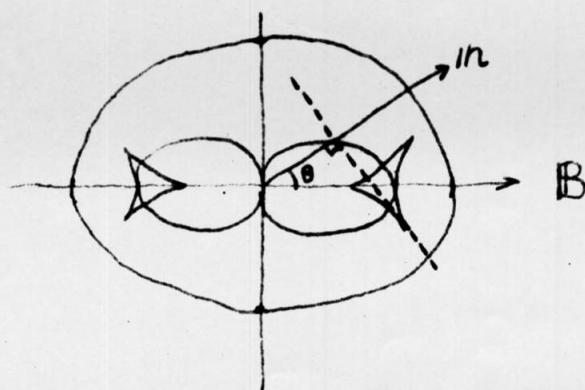


図 4.5 位相速度と波面との幾何学的関係

(注1) Appendix で示すように、空間3次元のときは、MHD Wave は fast mode slow mode のほかに、Alfvén mode が現われる。空間2次元のときに、この Alfvén mode が現われるのは、Alfvén mode における波の振動方向が磁力線と位相波の伝播方向に垂直であることによる（図4.6）。

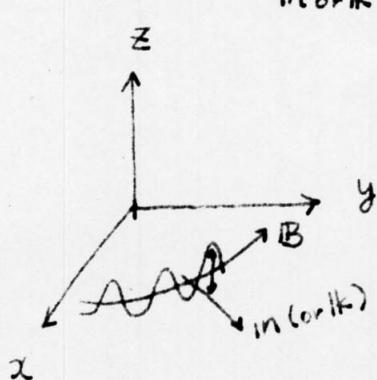


図4.6 Alfvén mode の振動方向

空間2次元では、Alfvén mode に伴って生じる B_z 成分は許されない ($B_z = 0$ の仮定) のである。

(注2) $\varphi_t = -\omega$, $\varphi_{x_i} = k_i$ からも推測できるように、特性条件

$$\det(\mathbb{I}\varphi_t + \mathbf{A}_{\mathbf{k}_i} \varphi_{x_i}) = 0 \quad (4.20)$$

は linear theory における dispersion relation に対応している。

このことから逆に $\omega \sim \omega_0 \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}))$ において作られた dispersion relation から 特性条件を求め、特性曲面の考察などをすることが可能である。

4.4 Generalization of Riemann's Method — Normal Form of Hyperbolic Partial Differential Equations

これまでに見て来たように、双曲型方程式の場合は、

$$\det(\mathbb{I}\varphi_t + A_i \varphi_{x_i}) = 0 \quad (4.20)$$

をみたす実の特性曲面 $\varphi = \text{一定}$ が存在する。あるいは、

$$\det(n_i A_i - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

をみたす実根入が存在する。 $(n_i A_i)$ の固有値が実である。このとき、

$$\tilde{A} \equiv \mathbb{I}\varphi_t + A_i \varphi_{x_i} \quad (4.37)$$

とて定義された \tilde{A} を 特性行列 と呼び、 \tilde{A} は正則でない ($\det \tilde{A} = 0$)。

すなわち、ある左(または右)vector $\ell(\text{lr})$ が存在して

$$\ell \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot \text{lr} = 0 \quad (4.38)$$

この ℓ (またはlr)を、左(または右)零ベクトル(left [or right] nullvector)と呼ぶ。
(これはまた、 $n_i A_i$ の左(右)固有ベクトルである。) この左零ベクトルを元の方程式

$$\mathcal{L}[\omega] + C = 0 \quad (4.39)$$

$$\text{ただし, } \mathcal{L} = \mathbb{I} \frac{\partial}{\partial t} + A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

の左からかけた

$$\ell(\mathcal{L}[\omega] + C) = 0 \quad (4.40)$$

$$\text{または } \ell([\mathbb{I} \frac{\partial}{\partial t} + A_i \frac{\partial}{\partial x_i}] \omega + C) = 0$$

を compatibility relation と呼び、これは 特性曲面(さらに 特性射線)
に沿って成り立つ関係式となる。 $\ell \cdot \mathcal{L}$ は interior operator と呼ばれる。
(Courant and Hilbert p581)

(4.40)または(4.40')が、Riemann の方法の一般化であることは、次の
流体力学の例を見ればわかるであろう。

[例] 1次元圧縮性流体を考える。ただし, adiabatic を仮定する。方程

式は

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4.43)$$

ここで、
 $w = \begin{bmatrix} p \\ u \\ p \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u & p & 0 \\ 0 & u & 1/p \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix} \quad (4.44)$

とおくと、方程式は

$$(I \frac{\partial}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial x}) w = 0 \quad (4.45)$$

となる。特性行列 $I \varphi_t + A \varphi_x$ の左零ベクトルは

$$[l_1 \ l_2 \ l_3] \begin{bmatrix} \varphi_t + u \varphi_x & p \varphi_x & 0 \\ 0 & \varphi_t + u \varphi_x & \varphi_x / p \\ 0 & \gamma p \varphi_x & \varphi_t + u \varphi_x \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0]$$

の解として求まる。ただし、特性速度 $\lambda (= -\frac{\varphi_t}{\varphi_x})$ は、

$$\lambda_1 = u \quad (\text{流線}) \quad (4.46)$$

$$\lambda_{2,3} = u \pm v_s \quad (\text{音波}) \quad (4.47)$$

である。

i) 流線 $\ell_1 = [v_s^2 \ 0 \ -1]$ (4.48)

ii) 音波 $\ell_{2,3} = [0 \ \pm v_s \ -\frac{1}{\rho}]$ (4.49)

より compatibility relation は、次のようになる。

i) 流線 $\frac{dp}{dt_1} - v_s^{-2} \frac{dp}{dt_1} = 0$ (4.50)

ii) 音波 $\frac{d}{dt_{2,3}} (u \pm \int^p \frac{dp}{\rho v_s}) = 0$ (4.51)

あるいは $\frac{d}{dt_{2,3}} u \pm \frac{1}{\rho v_s} \frac{d}{dt_{2,3}} p = 0$ (4.51')

ただし,

$$\frac{d}{dt_1} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt_{2,3}} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm v_s) \frac{\partial}{\partial x}$$

(4.50)は 流線に沿って エントロピーが 保存されることを示し、(4.51)は 音波の射線に沿って Riemann の不変量 $u \pm \int \frac{dp}{\rho v_s}$ が 保存されることを表わす。(正確にいうと、 p が " ρ のみの関数のときだけ積分可能なので"、そのとき初めて Riemann の不変量となる。)

今、空間1次元なごと (全体では t, x の2次元), 特性曲面は 特性射線に縮退しており、通常の特性曲線である。流線・特性曲線 (C_0) と 音波の特性曲線 (C_- , C_+) を 図4.6 に示す。

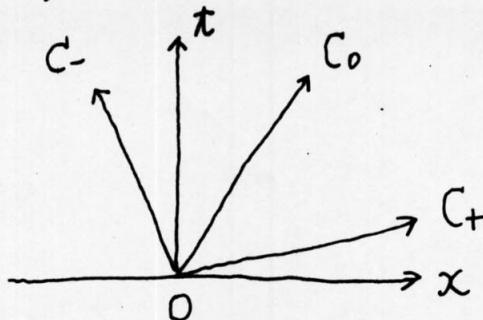


図4.6 1次元流体の特性曲線

ここまでのお話は、Courant and Hilbert (1962), Jeffrey and Taniuti (1964) 谷内, 西原 (1977) 在どに詳述されている通りである。しかし、多次元双曲問題といふのはあまり手がつけられていないらしく (谷内, 西原, 1977), 以下に述べる2次元 MHD eqs. の compatibility relation を求めた文献は見当たらぬ。

*

*

*

さて、我々の問題 (2次元 MHD eqs.) の compatibility relation を求めてみよう。左零ベクトルを求めることから始める。特性行列は (4.14) で与えられ ($I\P_t + A\P_y + B\P_x$), 問題は次の方程式を解くことになる。

$$\begin{bmatrix} l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccccc}
 \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y & \rho\varphi_x & \rho\varphi_y & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y & 0 & -\frac{B_y}{4\pi\rho}\varphi_z & \frac{B_y}{4\pi\rho}\varphi_x & \frac{\varphi_x}{\rho} \\
 0 & 0 & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y & \frac{B_x}{4\pi\rho}\varphi_y & -\frac{B_x}{4\pi\rho}\varphi_z & \frac{\varphi_y}{\rho} \\
 0 & -B_y\varphi_y & B_x\varphi_y & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y & 0 & 0 \\
 0 & B_y\varphi_x & -B_x\varphi_x & 0 & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y & 0 \\
 0 & \gamma p\varphi_x & \gamma p\varphi_y & 0 & 0 & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y
 \end{array} \right] \\
 = [0, 0, 0, 0, 0, 0] \quad (4.52)$$

ただし、(4.22)~(4.24)より

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (\varphi_t = -\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi)$$

$$\lambda_{3,4} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \pm C_f \quad (\varphi_t = -\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \pm C_f / |\nabla \varphi|)$$

$$\lambda_{5,6} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \pm C_s \quad (\varphi_t = -\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \pm C_s / |\nabla \varphi|)$$

であり、それぞれの場合について、 \mathbf{Q} を求めなければならない。詳しい計算は省略して結果のみ記すと、

i) 流線 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$)

$$\mathbf{Q}_1 = [1, 0, 0, 0, 0, v_s^{-2}] \quad (4.53)$$

$$\mathbf{Q}_2 = [0, 0, 0, n_x, n_y, 0] \quad (4.54)$$

$$\text{ただし } \mathbf{n} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}$$

ii) fast mode ($\lambda_{3,4} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \pm C_f$)

$$\mathbf{Q}_{3,4} = [l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6] \quad (4.55)$$

ただし

$$l_1 = 0$$

$$l_2 = [v_s^2 B_y + (C_f^2 - v_A^2) B n_x] C_f B$$

$$l_3 = [-v_s^2 B_y + (C_f^2 - v_A^2) B n_y] C_f B$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (4.56)$$

$$\left. \begin{aligned} l_4 &= [v_s^2 B + (C_f^2 - V_A^2)(n_x B_y - n_y B_x)] V_A^2 n_y \\ l_5 &= -[v_s^2 B + (C_f^2 - V_A^2)(n_x B_y - n_y B_x)] V_A^2 n_x \\ l_6 &= -\frac{B}{\rho} [v_s^2 (n_x B_y - n_y B_x) + (C_f^2 - V_A^2) B] \end{aligned} \right\}$$

iii) slow mode ($\lambda_{5,6} = v \cdot \mathbf{n} \pm C_s$)

(4.55), (4.56)において C_f をすべて C_s に置かえればよい。

compatibility relation は, $\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{I} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial y}) \mathbf{w} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} = 0$ である。
 \mathbf{A}, \mathbf{B} は (4.9), (4.10) で与えられている。上で求めた \mathbf{Q} を具体的に代入していくと

i) 流線

$$(a) \quad \frac{dP}{dt} - v_s^{-2} \frac{dP}{dt} = 0 \quad (4.57)$$

$$(b) \quad \mathbf{n} \cdot \frac{dB}{dt} + n_x (-B_y \frac{\partial u}{\partial y} + B_x \frac{\partial v}{\partial y}) + n_y (B_y \frac{\partial u}{\partial x} - B_x \frac{\partial v}{\partial x}) = 0 \quad (4.58)$$

あるいは

$$\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) = 0 \quad (4.58')$$

ただし

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

(a) は エントロピー 保存を表わし (1次元流体の[例]と同様)

(b) は 磁束の保存 (frozen in) を表わす。この (4.58) は frozen in の式

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (4.59)$$

と同値である。

このように、2次元 MHD (adiabatic) では、流線に沿って、エントロピーのみならず、磁束も保存される。

ii) fast mode

この場合 次のような形になるが、式の持つ意味については明らかでない。
(もはや 不变量は存在しない)

$$\begin{aligned} & Q_A \cdot \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho} \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B} - g \right] \\ & + Q_B \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \\ & + l_6 \cdot \left[\frac{dp}{dt} + \rho p \text{div } \mathbf{v} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

ただし、

$$Q_A = [v_s^2 e_A + (C_f^2 - v_A^2) \mathbf{n}] C_f B \quad (4.61)$$

$$Q_B = [v_s^2 + (C_f^2 - v_A^2)(\mathbf{n} \cdot e_A)] v_A^2 e_n \quad (4.62)$$

$$l_6 = -\frac{B}{\rho} [v_s^2 (e_A \cdot \mathbf{n}) + (C_f^2 - v_A^2)] \quad (4.63)$$

$$e_A = \frac{1}{B} [B_y, -B_x] : \mathbf{B} \text{に垂直な 単位ベクトル}$$

$$e_n = [n_y, -n_x] : \mathbf{n} \quad "$$

iii) slow mode

fast modeにおいて C_f を C_s とすればよい。

(注) 1次元の場合から類推すると、compatibility relation は 特性射線
に沿っての時間微分

$$\frac{d}{d\tau_r} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_r \cdot \nabla \quad (4.64)$$

\mathbf{v}_r : 射線速度 (§4.3)

に属する 標準形 を表わしているのではないかと考えられる。

ただし、次の式 (4.65) に見られるように、この標準形はあまり意味のある
形をしていない。

fast mode の場合, (4.35) より

$$\frac{d}{dt_r} = \frac{\partial}{\partial t} + (V \pm C_f) n \mp \frac{V_s^2 (V_A \cdot n) (V_A \cdot e_n) e_n}{C_f (2C_f^2 - V_A^2 - V_s^2)} \cdot \nabla$$

となる。この $\frac{d}{dt_r}$ を (4.60) を書き直すと,

$$\begin{aligned}
 & Q_A \cdot \frac{dV}{dt_r} + Q_B \cdot \frac{dB}{dt_r} + l_6 \frac{dp}{dt_r} \\
 & - Q_A \left\{ (\pm C_f) n \mp \frac{V_s^2 (V_A \cdot n) (V_A \cdot e_n) e_n}{C_f (2C_f^2 - V_A^2 - V_s^2)} \cdot \nabla \right\} V \\
 & + Q_A \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho} \operatorname{rot} B \times B - g \right) \\
 & - Q_B \left\{ (\pm C_f) n \mp \frac{V_s^2 (V_A \cdot n) (V_A \cdot e_n) e_n}{C_f (2C_f^2 - V_A^2 - V_s^2)} \cdot \nabla \right\} B \\
 & + l_4 \cdot \left(-B_y \frac{\partial u}{\partial y} + B_x \frac{\partial v}{\partial y} \right) + l_5 \cdot \left(B_y \frac{\partial u}{\partial x} - B_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 & - l_6 \left\{ (\pm C_f) n \mp \frac{V_s^2 (V_A \cdot n) (V_A \cdot e_n) e_n}{C_f (2C_f^2 - V_A^2 - V_s^2)} \cdot \nabla \right\} p \\
 & + l_6 \gamma p \operatorname{div} V = 0
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

$$t = t_r, \quad Q_A = (l_2, l_3) = (4.61)$$

$$Q_B = (l_4, l_5) = (4.62) \quad \left. \right\} = (4.56)$$

$$l_6 = (4.63)$$

± は 実際には $n = (\cos\theta, \sin\theta)$ の θ , $\theta + \pi$ が "帰するので", $0 \leq \theta \leq 2\pi$ であれば必要ない。また, (4.65) をもと見やすい形に整理しようと何度も試みたが、まだ成功していない。

4.5 Mixed Initial and Boundary Value Problem

4.2で示したように、我々の問題は双曲型の問題である。一般に双曲型偏微分eqs. は初期値問題に現われるが（これに対応するのか）、橢円型一境界値問題である）。境界のある問題では、混合初期値境界値問題となる。我々の問題は、まさにこの場合である。なぜなら、現実的な境界面がなくても、数値シミュレーションをするとなれば、必ず人工的な境界面が存在するからである。この問題の特徴は図4.8に示すように、境界に特性曲線が戻ってくる場合がある、ということである。このことは、境界条件が任意に与えられ

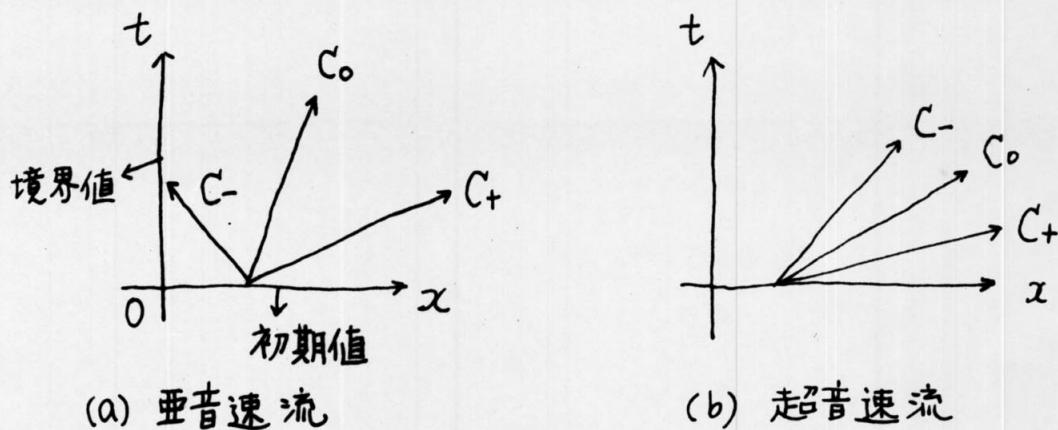


図 4.8. 1次元流体における混合問題

ないことを意味する。物理的には、境界ごの物理量が境界下部からだけでは決定できず、境界上部の情報（音速またはAlfvén速度で運ばれてくる）にも影響されるということである。（例外は x の正方向に流れる超音速流（図4.8 (b)）で、このとき境界 ($x=0$) は $x>0$ の領域の情報を全く知らない。）

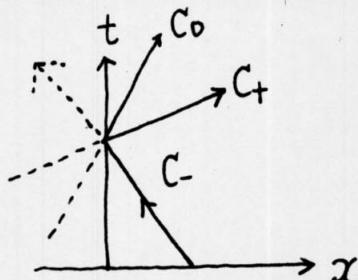
1次元の場合には、§4.4で求めた compatibility relation を用いて簡単に上部の情報をとり入れることができるが、2次元の場合には著しい困難が生じる。これらのことを具体的な numerical method とともに解説するのが次章(§5)の主題である。

§5. Numerical Method

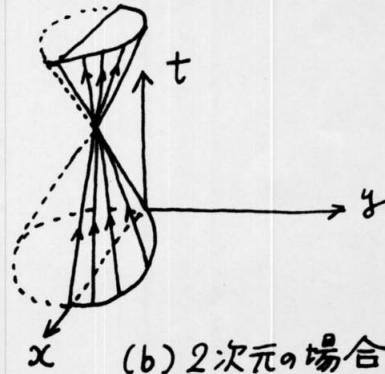
5.1. Difficulties in Multidimensional Problem

はじめに、多次元問題特有の困難について述べる。まず、¹にあげられるのは、多次元になると、メッシュ点が著しく増大するということである。つまり正方形メッシュでメッシュを1次元当たり n とすると、2次元では総計 n^2 、3次元では n^3 となる。その上、空間を細かくすればするほど、時間間隔も細かくしなければならない（クラン条件—後述 §5.2）ので、実際上は空間+1次元と思わなければならぬ。そうすると、空間2次元では n^3 、3次元では n^4 となって、計算量、従って計算機の計算時間(CPU time)が著しく増大することになる。例えば、我々の問題(光球での空間2次元MHD)では、空間 30×20 ($\Delta x = 50\text{ km}$)で“時間 1step 当りの CPU time は約 2 sec”であった。時間間隔 $\Delta t = 0.5\text{ sec}$ とて 30 sec まで計算するには、60 step 必要となり CPU time は約 120 sec である。同じ計算で“空間を 4倍 細かくしようとすると、($\Delta x = 12.5\text{ km}$, $\Delta t = 0.125\text{ sec}$) CPU time はして $4^3 = 64$ 倍、つまり約 7700 sec (240 timestep… 約 2 時間) かかることになる。経済性から言って、CPU time は数時間が“限界”であろうから、空間メッシュを 60×80 ($\Delta x = 12.5\text{ km}$) とするとき、時間の step 数でせいぜい数 100 step までしかできることになる。(このとき、計算上の時間はせいぜい $\Delta t \sim$ 数分で”ある。つまり、このメッシュ系で、数時間の time scale の現象をシミュレートするなどというのは論外なのである。) このように、いくら大型計算機が発達しても、実行可能な計算というのは限られている。言いかえると、問題を計算可能のように変形する、計算可能な問題を見い出す、というのが“大型計算機を上手に利用するための、本来の基本的姿勢”であろう。

第2の困難は境界条件の設定である。通常の流体力学のシミュレーションでは、境界条件は、(1)対称性(周期的状況や、左右対称の問題などのとき)、(2)固定、(3)自由(内部の量からの外挿で決める)、など“か”主として使われる。しかし、§4で述べたように、数学的には混合初期値境界値問題であるので、すべての物理量を任意に与えることはできない。この問題については、1次元の場合に、Nakagawa and Steinolfson (1976), Steinolfson and Nakagawa (1976) が“混合問題として正しい境界条件の決定法”(§4で述べた compatibility relation を用いる、§5.3を見よ)と、その具体例及び外挿法などとの比較を行っている。2次元についても Nakagawa et al. (1976) は、同じような方法で MHD シミュレーションを行なったと報じているが、その具体的な方法については述べられていない。これは、図 5.1 を見てもわかるように、2次元では



(a) 1次元の場合



(b) 2次元の場合

図 5.1 混合問題の境界条件

1次元とは根本的に異なる困難が発生するためと思われる。つまり1次元のときある境界点に入ってくる特性曲線と出でゆく特性曲線は明瞭に区別できるのに、2次元のときは、流線以外は特性曲線なので明瞭でない、あるいは、特性射線だと無限個にある、(§5.3)などである。我々はこの問題について納得のゆく解答を得ていない。

この境界条件の問題については、§5.3で1次元の場合と、それをそのまま2次元に拡張した方法を述べ、§5.4では実際のシミュレーションで用いた方法を述べる。次の§5.2は、内部の計算法について述べる。

5.2 Interior—Modified Lax-Wendroff Method

まず、はじめに通常の Lax-Wendroff Method (LW法)について述べる。
簡単のため、空間 1 次元の場合について記す。方程式が

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(w) = 0 \quad (5.1)$$

のように、保存形で表わされているとき、次のように two-step で積分する。

step 1

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (w_j^n + w_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) \quad (5.2)$$

ただし、 n, j はそれぞれ時間、空間のメッシュ点の番号を表わし、
 $\Delta t, \Delta x$ はメッシュ幅である。

また、 $F_j^n \equiv F(w_j^n)$ であり、ベクトルを表わす subscript は省いてある。

step 2

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (5.3)$$

この方法は、 $F_k = A_{kl} w_l$ (ただし、 k, l はベクトルを表わし、 A_{kl} は定行列とする)
のように簡単な場合には、すぐわかるように

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{1}{2} A \frac{\Delta t}{\Delta x} (w_{j+1}^n - w_{j-1}^n) + \frac{1}{2} (A \frac{\Delta t}{\Delta x})^2 (w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n) \quad (5.4)$$

となり、error term は $O[(\Delta t)^3]$ であって、2次の精度をもつ。

また、stability criterion は

$$(|u| + v_s) \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (5.5)$$

である。これは クーラン条件 (Courant condition) と呼ばれ、この LW 法の
ような 陽解法 (explicit scheme) の場合には、必ず考慮しなければならない。
クーラン条件は、「計算上の情報伝達速度 ($\frac{\Delta x}{\Delta t}$) が、現実の物理的伝達
速度 (音速など) よりも速くなければならない」ということを意味している。
このことは、双曲型問題に現われる、決定領域 (図 5.2. ABOD 内) と、
依存領域 (図 5.2. 直線 BCD) の議論から理解できる。つまり、

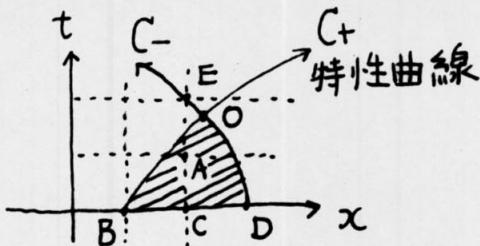
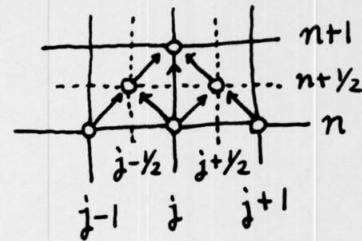
図5.2 決定領域 (ΔBOD) と依存領域 (ΔBCD)

図5.3 1次元 LW 法

決定領域内 の点 (A) は、依存領域 (ΔBCD) だけから決定できるが、決定領域外の点は情報が足りないので決定できない。クラン条件は、 ΔBCD より決める点 A は必ず " ΔBCD の決定領域内になければならぬ"、ということを述べてある。LW法の圖解を 図5.3に示す。

次に、Rubin and Burstein (1967) によて suggest された modified LW法をまず 1次元の場合について述べる。方程式は (5.1) と同じとする。

$$\text{step 1} \quad w_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} (w_j^n + w_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_j^n) \quad (5.6)$$

$$\text{step 2} \quad w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\frac{1}{2} (\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_{j-1}^n) + \bar{F}_{j+1/2}^{n+1} - \bar{F}_{j-1/2}^{n+1} \right] \quad (5.7)$$

図解すると、図5.4のようになる。

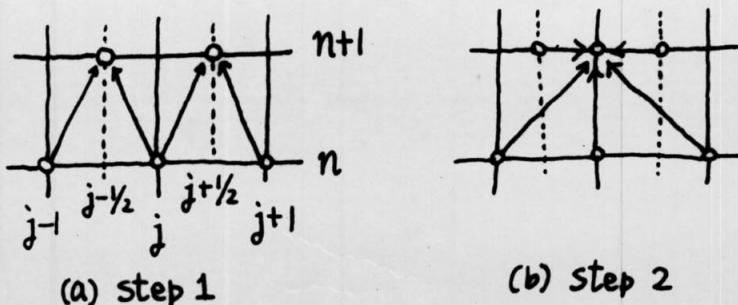


図5.4 1次元 modified LW 法

2次元の場合を、次の 準保存形

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(w) + \frac{\partial}{\partial y} G(w) + S(w) = 0 \quad (5.8)$$

について述べる。

step 1

$$\begin{aligned}
 w_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} = & \frac{1}{4} (w_{j+1, k+1}^n + w_{j+1, k}^n + w_{j, k+1}^n + w_{j, k}^n) \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1, k+1}^n - F_{j, k+1}^n + F_{j+1, k}^n - F_{j, k}^n) \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (G_{j+1, k+1}^n - G_{j+1, k}^n + G_{j, k+1}^n - G_{j, k}^n) \\
 & - \frac{\Delta t}{4} (S_{j+1, k+1}^n + S_{j+1, k}^n + S_{j, k+1}^n + S_{j, k}^n) \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

step 2

$$\begin{aligned}
 w_{j, k}^{n+1} = & w_{j, k}^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} (F_{j+1, k}^n - F_{j-1, k}^n + \hat{F}^{n+1}) \\
 & - \frac{\Delta t}{4\Delta y} (G_{j, k+1}^n - G_{j, k-1}^n + \hat{G}^{n+1}) \\
 & - \frac{\Delta t}{2} (S_{j, k}^n + \hat{S}^{n+1}) \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 \hat{F}^{n+1} &= F_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} - F_{j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} + F_{j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^{n+1} - F_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^{n+1} \\
 \hat{G}^{n+1} &= G_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} - G_{j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^{n+1} + G_{j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} - G_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^{n+1} \\
 \hat{S}^{n+1} &= \frac{1}{4} (S_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} + S_{j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^{n+1} + S_{j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} + S_{j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^{n+1})
 \end{aligned}$$

この方法は通常の LW 法よりも、大きい クーラン数 ($\equiv (|u| + |v|) \frac{\Delta t}{\Delta x}$; ≈ 53 よりは小さい) のときの 衝撃波のオーバーシュートが少ないと (Roche, 1972) いう利点がある。

5.3 Boundary—Method of Compatibility Relation (CR Method)

はじめに、空間1次元の場合のCR法について述べる。 x 方向の流速 u が $0 < u < v_s$ (音速) であるような1次元流体 (§4.4 [例]) の場合、境界 ($x=0$) に沿ってくる特性曲線は1つ (C_-) だけである。(図5.5) このことは、3つの

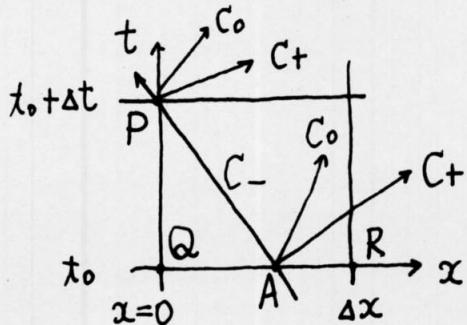


図5.5 1次元流体の特性曲線とメッシュ系

未知数 (P, u, p) のうち、1つは任意に与えることができないことを意味している。(リーマンの不变量 R_- が任意に与えられない。なぜなら、 R_- は C_- に沿って一定ゆえ、A点における R_- と P点の R_- とは等しくなければならぬからである。これはリーマンの不变量が存在しないとき(ただし、空間1次元)にも拡張できること。つまり、P点において $f(P, u, p) = R_-$ (定数) という関数関係が束縛条件として存在し、 P と p を与えれば u は自動的に決まる(u は任意に与えられない)。

以上のことを定式化する。1次元 adiabatic 流体の compatibility relation は (4.51') より

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u - v_s) \frac{\partial}{\partial x} \right) u - \frac{1}{p v_s} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u - v_s) \frac{\partial}{\partial x} \right) p = 0$$

ただし、 C_- ($\lambda_3 = u - v_s$) の場合である。これが上に述べた束縛条件に相当する。次にこれを差分化する。 $(\frac{d}{dx})_{C_-} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (u - v_s) \frac{\partial}{\partial x}$ (= 注意する)

$$\frac{u_p - u_A}{\Delta t} - \frac{1}{(p v_s)_p} \frac{p_p - p_A}{\Delta t} = 0 \quad (5.11)$$

ここで、 p, A は図5.5 上の点 P, A における値を使うという意味である。A点における u_A, p_A は、Q, R の値から内挿で決める。すなわち、

$$U_A = \theta \cdot U_Q + (1-\theta) \cdot U_R \quad (5.12)$$

ただし、
 $\theta = \frac{\overline{AR}}{\Delta x}$

A 点の位置 \overline{AQ} は、 A における射線速度 $\lambda_A = (U - v_s)_A$ (注：1次元のときは射線速度 = 特性速度) を Q, R の内挿から決定する式 (むろん \overline{AQ} が未知数として含まれる) と、 $\overline{AQ} = -\lambda_A \Delta t$ より決定される。すなわち、

$$\overline{AQ} = - \frac{\lambda_Q \Delta t}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\lambda_R - \lambda_Q)} \quad (5.13)$$

ただし、 $\lambda \equiv U - v_s$ であり、 Q, R は図 5.5 でのメッシュ点を表わす。 (5.11) において、 U_A, P_A は既知、さらに P_p, P_F が任意に与えられる境界条件とすると U_p が一意的に決定される。また、下降流 ($U < 0$) のときは、 C_0 も境界に到達するので 任意に与えることのできる量は 1 つだけになり、そのときは、エントロピー保存の式 (4.50)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) P - v_s^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) P = 0$$

が加わり、同様に差分化して

$$(P_p - P_F) - v_s^{-2} p \cdot (P_p - P_F) = 0 \quad (5.14)$$

(F は流線と $t = t_0$ の交点)

となり、 $(5.11), (5.14)$ が “ (U, P) または (U, p) ” についての連立方程式となる。このとき、 (5.11) の $(Pv_s)_p$ や (5.14) の $v_s^{-2} p$ は未知数を含むので、オイ近似としては Q 点の量に過ぎない。さらに近似をあげるには、必要なだけ反復する。

以上が 1 次元混合問題における境界条件の正しい決定法 (CR 法) である。この方法では、境界での流れの速度によって任意に与えられる物理量の数が変化するので、その点について注意する必要がある (表 5.1)。

表 5.1 任意に与えることができる物理量 (1次元流体)

	u^n	ρ^{n+1}	u^{n+1}	p^{n+1}	到達する特性曲線
1)	$u > u_s$	○	○	○	なし
2)	$u_s \geq u > 0$	○	×	○	C_-
3)	$0 \geq u > -u_s$	×	×	○	C_-, C_0
4)	$-u_s \geq u$	×	×	×	C_-, C_0, C_+

(注) 3) で ρ と p を入れかえてもよい。どちらを選ぶかは問題に応じて決める。

○: 任意に与えることができる, ×: CR 法で決定される

次に、空間 2 次元の場合の CR 法について述べる。§5.1 にも述べたように、2 次元になると、1 次元の場合とは本質的に異なる困難が生じる。

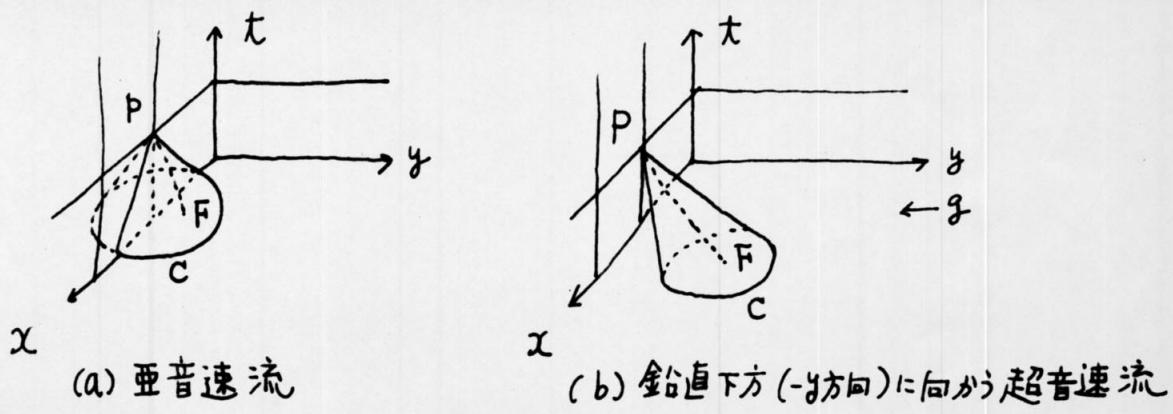


図 5.6. 2 次元流体の特性曲面とメッシュ系

これは、特性曲線が特性曲面にならためであり、図 5.6 からすぐにわかる難点をあげると次のようになる。

- (1) 境界 (P) に到達する特性曲面はいくつなのか (a) の場合明瞭である。
- (2) 特性曲面と $t = \text{一定}$ の平面との交点は無限個ある。(または、特性射線が無限個)

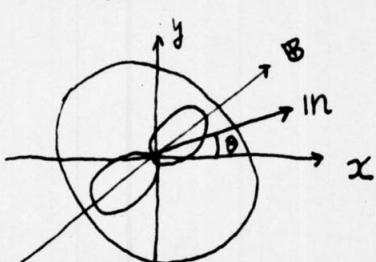
(1) の困難は特性曲面 1 につき 2 つの物理量が関連しているため、任意に与える物理量の決定の困難を導く。 (2) の困難は、使うべき compatibility relation が無限個 ($\partial n = (\cos\theta, \sin\theta)$ の任意性) あって

どれを使えばよいのか、また、いくつを使えばよいのか、という疑問を導く。

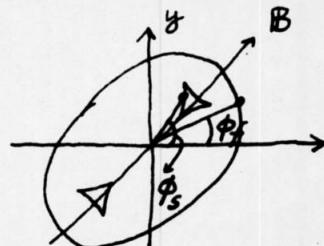
我々は、これらの点について納得のゆく解答を得ていないので、これから述べる CR 法は暫定的なものである。

以下では、まず、特性射線の足を適当に決めてその点の物理量を内挿で決定し、のち、その特性射線に沿って成り立つ compatibility relation を用いて境界値を決定するというやり方で述べてやく。その際、特性射線は有限個 ($\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$) 使い、境界値を決定したあとで 2 つの平均をとるというようにした。(compatibility relation の段階で平均を取る方法 — $\theta = \text{周ある積分} - \text{も考えられる}$)

特性射線の足は、 $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ の所を考える。ただし、これは phase velocity diagram 上の角度なので実際の空間での角度とは異なる(図 5.7)。



(a) phase velocity



(b) wave front

図 5.7 MHD Wave

ϕ と θ の関係は次式で与えられる。

$$\tan \phi = \frac{r^4}{r^4 - 1} \tan \theta \quad (5.13)$$

ただし、
 $r = \frac{C}{\sqrt{U_A U_S}}$, C は C_f or C_s

しかし、 C_f, C_s はともに θ (従, z/m) に依存しており (4.16), (4.17), (5.13) の逆の関係 $\theta = f(\phi)$ を求めることは、きわめて煩雑 (数値的にやらざるを得ない) なので 実際の計算では θ を先に与えて、(4.35) (4.36) (射線速度) により足の位置を決める。 (5.13) は使わない! この方法では、しかしながら、

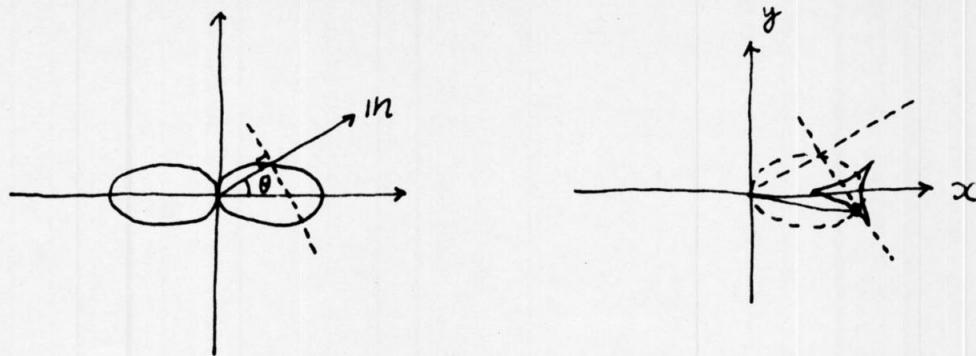


図5.8 $y < 0$ の領域に来た特性射線の足 (§4.3 参照)

θ の与え方によては足の位置が $y < 0$ の領域(今は、 $y=0$ を境界とする)にあることがある。例えば 図5.8。この $y < 0$ の領域は境界の外部であり、物理量の決定は不可能である。従って $y < 0$ になれば、 $\theta' = \theta + \delta\theta$ とて、 $y > 0$ になるまで位置を変えるようにする。そのようにして足の位置が決まれば、図5.9のようにして、Q点を決め、RとSの比例配分でQの量を決定し同じくOとQとでBを決める。

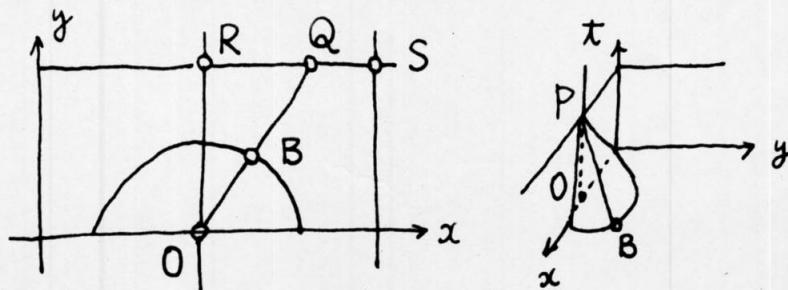


図5.9 足の決定と内挿法

Bの量が決まれば、compatibility relation (4.60) or (4.65)を用いて境界条件が決定できる。compatibility relation は次のように書ける。

$$l_i \frac{d w_i}{d \tau} + Y = 0 \quad (5.14)$$

ただし、fast mode の場合 (slow mode τ は $C_f \rightarrow C_s$)

$$\frac{d}{d \tau} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (u + C_f) n - \frac{v_s^2 (U_A \cdot n) (U_A - (n \cdot U_A) n)}{C_f \sqrt{(v_s^2 + U_A^2)^2 - 4 v_s^2 (U_A \cdot n)^2}} \cdot \nabla$$

l_i は §4 で述べた左零ベクトル。Y は w_i , θ , $\frac{\partial w_i}{\partial x}$, $\frac{\partial w_i}{\partial y}$ など "i" に依存する量。具体的な形は (4.65) に示されている。

(5.14)を差分化する。

$$l_{10} (w_{10} - w_{iB}) + \Delta t Y_0 = 0 \quad (5.15)$$

O, P, B は図5.9での x, y 点を表わす。 P 点に到達する特性曲面が図5.9のように半分に切られているときは、必要な compatibility relation が1つ（任意に与えられない物理量が1つ）と考える。半分ではなく、切られ方がかなり非対称的であっても同じように考える。全く切られていないとき（例えば超音速下降流—図5.6(b)）は、それぞれ2つと考える。（これは、はじめに述べた困難が未解決なための暫定処置である。） l_{10}, Y_0 は正しくは l_{1P}, Y_P であるから、これは第1近似の場合である。このようにして、 P の compatibility relation が決まれば、6-8の任意に与えうる境界条件を代入したのち、連立方程式を解いて境界条件が完備する。

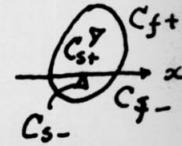
最後に P 点に到達する特性曲面と、任意に与えることができる量について表5.2に示す。これも暫定処置である。

表5.2 任意に与えることができる物理量 (2次元MHD)

	$v^n(v_y)$	ρ	u	v	B_x	B_y	P	到達する特性曲面
1)	$v > v_A$	○	○	○	○	○	○	なし
2)	$v_A \geq v > C_s(\frac{\pi}{2})$	○	○	×	○	○	○	C_f-
3)	$C_s(\frac{\pi}{2}) \geq v > 0$	○	×	×	○	○	○	$C_f - C_s -$
4)	$0 \geq v > -C_s(\frac{\pi}{2})$	×	×	×	○	×	○	$C_f - C_s - C_o$ (重根)
5)	$-C_s(\frac{\pi}{2}) \geq v > -v_A$	×	×	×	○	×	×	$C_f - C_s - C_o C_{s+}$
6)	$-v_A \geq v$	×	×	×	×	×	×	$C_f - C_s - C_o C_{s+} C_{f+}$

○: 任意に与えることができる , ×: CR法で決定される

$C_s(\frac{\pi}{2})$ は slow mode の $\theta = \frac{\pi}{2}$ の値。 C_{f-}, C_{f+} などは波面の半分を表わす。



5.4 Simplification of CR Method (SCR Method)

§5.3に述べた2次元CR法は、その数学的根拠が“稀薄”な上に、プログラムが“非常に長く複雑”になる。(最初に、このCR法のプログラムを作ったとき、1000行のうち700行がこのCR法によって占められていた。) さらに、我々の問題(太陽コロナでの磁束チューブの上昇運動)に適用した際、誤差が大きく、あまり実用的ではなかったので、これから述べるSCR法(この部分、約200行)で“実際のシミュレーションを行った。§6のNumerical ResultはすべてこのSCR法によるものである。ただし、最初のCR法のプログラムには若干の謬りがあることが後に判明し、精度をあげる方法もいくつか考えられるので、数学的根拠は別にして、実用的になりうる可能性は残されている。

SCR法は、その名の通り、CR法の簡単化である。CR法で“プログラムが”長くなれた最大の原因是、fast mode, slow modeにおいての compatibility relation が“きわめて複雑”な式(4.65)になっていたことである。さらに、これらの compatibility relation によって求まる速度場(表5.2)の誤差が大きいということであったので、fast mode, slow mode における compatibility relation は一切使わず、その代わりに、内部の計算結果から外挿して決定するようにした。つまり

$$W_{i,1}^{n+1} = 2W_{i,2}^{n+1} - W_{i,3}^{n+1} \quad (5.16)$$

としたわけである。(図5.10) 任意に与えることができる量の場合分け(表5.2)は残し、流線の compatibility relation(エントロピー保存、磁束保存)もそのままにした。さらに、解をなめらかにする意味で(5.16)で得られた $W_{i,1}^{n+1}$ を

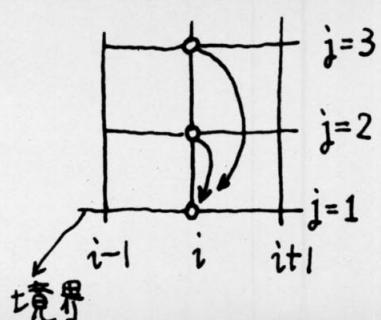


図5.10

用いて

$$W_{i,1}^{n+1} = \frac{1}{3}(W_{i-1,1}^{n+1} + W_{i,1}^{n+1} + W_{i+1,1}^{n+1}) \quad (5.17)$$

として、 $W_{i,1}^{n+1}$ を真の解とした。ただし、本当は(5.17)が(5.16)よりも解をなめらかにするかどうかは調べていない。

また、磁束の保存の式は(4.58)で与えられており

$$\begin{aligned} n_x \frac{dB_x}{dt} + n_y \frac{dB_y}{dt} + n_x (-B_y \frac{\partial u}{\partial y} + B_x \frac{\partial v}{\partial y}) \\ + n_y (B_y \frac{\partial u}{\partial x} - B_x \frac{\partial v}{\partial x}) = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

である。 $n = (n_x, n_y)$ は任意なので、 $n = (0, 1)$ とした。つまり。

$$\frac{dB_y}{dt} + B_y \frac{\partial u}{\partial x} - B_x \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (5.18)$$

差分化は、CR法でのやり方と同じである。ただし、(5.15)からわかるように、境界での $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ が必要なときは、((5.18)では $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$) x 微分は中心差分、 y 微分は前進差分とした。すなわち、

$$\frac{\partial w}{\partial x}_{i,1} = \frac{w_{i+1,1} - w_{i-1,1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}_{i,1} = \frac{w_{i,2} - w_{i,1}}{\Delta y}$$

表5.3はSCR法での場合分けと、任意に与えうるときどんな値をえたかを示す。

表5.3 SCR法 (Corona)

	v	p	u	v	B_x	B_y	p
1)	$v > v_A$				STOP		
2)	$v_A \geq v > C_s(\frac{\pi}{2})$	O(F)	O(O)	X(外)	O(B)	O(B)	O(F)
3)	$C_s(\frac{\pi}{2}) \geq v > 0$	O(F)	X(外)	X(外)	O(B)	O(B)	O(F)
4)	$0 \geq v > -C_s(\frac{\pi}{2})$	X(C)	X(外)	X(外)	O(B)	X(C)	O(F)
5)	$-C_s(\frac{\pi}{2}) \geq v > -v_A$	X(C)	X(外)	X(外)	O(B)	X(C)	X(外)
6)	$-v_A \geq v$				STOP		

ただし、
 (下)：初期条件を Fix
 (O)：0にする
 (外)：外接で決める
 (B)：時間の関数との境界条件を与える
 (C)：compatibility relation (流線)
 を使って決める。

STOP は現実にこのような状況は起こされないためである。

なお、実際のシミュレーションでは、 $y=0 (j=1)$ の境界（図 5.11(a)）にのみ、SCR 法を用いた。その他の境界のうち、 $x=0 (i=2)$, $x=(N-2)\cdot\Delta x (i=N)$ は対称面とし（図 5.11(b））その両側 ($i=1, 3 \text{ および } i=N-1, N+1$) で対称性が満たされようとした。すなわち、

 $i=1$

$P_{1,j} = P_{3,j}$

 $i=N+1$

$P_{N+1,j} = P_{N-1,j}$

$U_{1,j} = -U_{3,j}$

$U_{N+1,j} = -U_{N-1,j}$

$V_{1,j} = V_{3,j}$

$V_{N+1,j} = V_{N-1,j}$

$B_{x1,j} = -B_{x3,j}$

$B_{xN+1,j} = B_{xN-1,j}$

$B_{y1,j} = B_{y3,j}$

$B_{yN+1,j} = -B_{yN-1,j}$

$P_{1,j} = P_{3,j}$

$P_{N+1,j} = P_{N-1,j}$

では、実際の磁力線の向きが考慮にある。また対称面では必ず

 $i=2$

$U_{2,j} = 0$

 $i=N$

$U_{N,j} = 0$

$B_{x2,j} = 0$

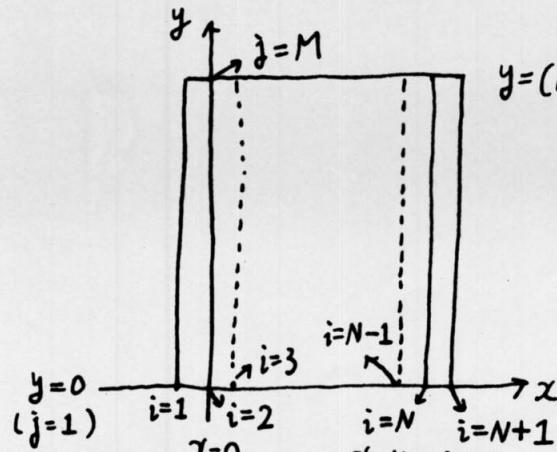
$B_{yN,j} = 0$

となるようにした。（その他の量は LW 法で計算される）

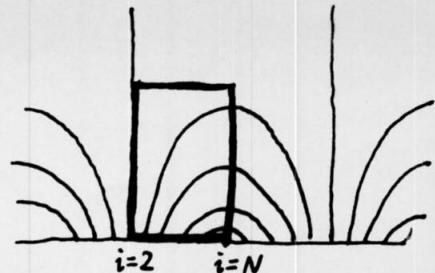
$y=(M-1)\cdot\Delta y (i=M)$ の境界では、すべての量 W を初期条件のまま固定した。

$W_{i,M}^{N+1} = W_{i,M}^N$

これは、運動が “ $y=0$ ” 与えられているので、運動が “ $y=(M-1)\Delta y$ ” に係わるまでは有効であり、56 の結果はその範囲のものである。



(a) 境界



(b) 周期性の仮定

図 5.11 境界条件

(注) 我々の問題(2次元MHD eqs.)は非線形なので“一般解”というものなどない。しかし、線型の問題(例えば2次元波動eq.)には一般解がある。CR Method の困難を解決するために、これを線型の問題に適用して、一般解と比較するという研究方法が考えられる。この問題については、まだ充分に考察していないか、線形問題からの suggestion として空間2次元(一般には偶数次元)のときには、ホイエンスの小原理 (Huygens' minor principle); 「ある(t_0, x_0, y_0)に振動を与えたとき、波面の内部($r \leq v_s(t-t_0)$, $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$)はどんなに時間がたつてもかくまし状態が続き、静かにならない」がある、ということに注意する必要がある。これは2次元の場合 図5.12に示すように、3次元空間の2つの異なる点からの球面波が2次元xy平面に遅れてやってくるためである。これから逆に考えると、我々の問題は2次元なので、「ある点を決める情報は波面だけではなく、波面内の全点からやってくる」と考えなければならなくて、ますます困難度は増大するということになる。

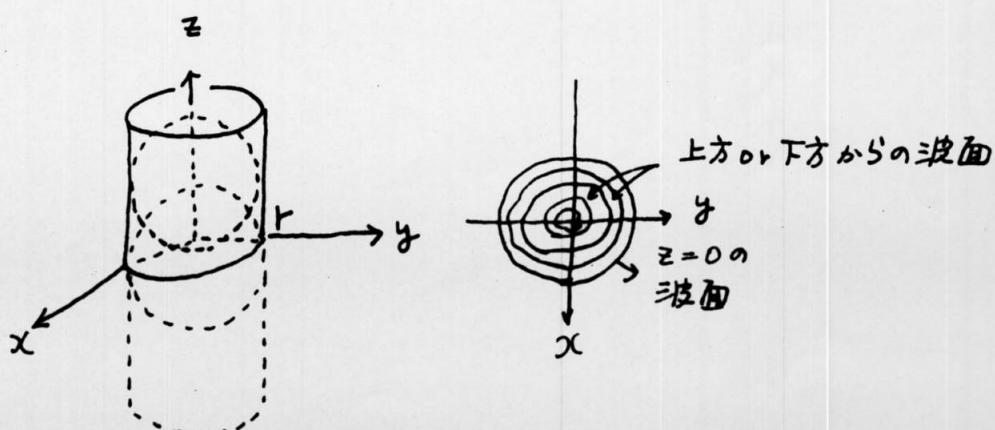


図5.12 ホイエンスの小原理

§6 Numerical Result

6.1 Corona (Nakagawa et al. (1976)'s Case)

Nakagawa et al. (1976) は、フレアの衝撃波起源説 (impact-infall model, Nakagawa et al. 1973) の根拠を調べるために、磁束チューブがコロナ中で急速に上昇するときのシミュレーションを行った。これは、フレア発生の前に磁束の増大が存在するという観測的な根拠 (Rust, 1973) に基づいている。その結果、超音速の下降流が得られこれが以前の衝撃波起源説の理論的な根拠になりうると結論した。(コロナ中で生じた超音速の下降流が衝撃波となって彩層に伝わり、そこでエネルギーを放出してフレアとなる、という説である)

我々は、まず、最初にこの Nakagawa et al. (1976) の結果が“出せ”かどうかるために、同じ初期条件、境界条件でシミュレーションを実施した。これらを以下に示す。

初期条件: lower surface ($y=0$) は photosphere から 3万 km の高さにあるとし、等温 hydrostatic, 磁場は current free とする。計算領域を図 6.1 に示す。

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{y}{H}\right)$$

$$u = v = 0$$

$$B_x = B_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x_m}\right) \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{y}{x_m}\right) g \downarrow$$

$$B_y = B_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x_m}\right) \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{y}{x_m}\right)$$

$$p = P_0 \exp\left(-\frac{y}{H}\right)$$

$$\text{ただし}, \quad x_m = 3200 \text{ km}$$

$$P_0 = 4.51 \times 10^{-16} \text{ (g cm}^{-3}\text{)}$$

$$P_0 = 1.19 \times 10^{-1} \text{ (dyn cm}^{-2}\text{)}$$

$$\text{scale height } H = \frac{P_0}{P_0 g} = 9.66 \times 10^9 \text{ (cm)} \sim 10 \text{ 万 km}$$

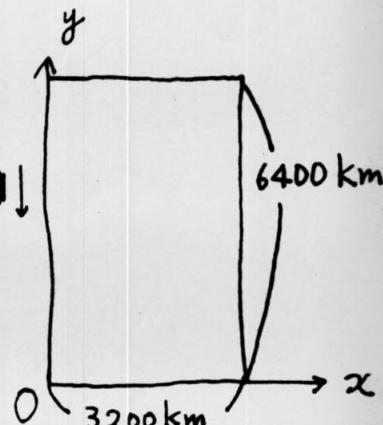


図 6.1.

$$\begin{array}{l} \text{heat} \quad g = 2.74 \times 10^4 \text{ (cm s}^{-2}\text{)} \\ \text{specific ratio} \quad \gamma = 1.2 \\ B_0 = 10 \text{ or } 1 \text{ (G)} \end{array}$$

境界条件： $y=6400 \text{ km}$ では初期値のまゝ。 $x=0, 3200 \text{ km}$ は対称性を考慮して計算される。(§5 参照)。 $y=0$ における磁場の変化は以下のように規定する。

$$\begin{aligned} y=0 \quad B_x &= B_0 \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x_m} \right) (1+\alpha t) \\ B_y &= B_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x_m} \right) (1+\alpha t) \end{aligned}$$

ただし, $\alpha = 0.017 \text{ (s}^{-1}\text{)}$ 。これは $B_0 = 10 \text{ G}$ のとき, 10 G min^{-1} の増大率に対応する。

メッシュ幅 $\Delta x = 320 \text{ km}$ (10×20) の場合のシミュレーションの結果を, Nakagawa et al. (1976) の結果とともに以下に示す。(Nakagawa et al. のメッシュなどについては不明) なお、メッシュ数を倍 (20×40) にしても基本的な解の性質は変わらなかったことをつけ加えておく。

$B_0 = 10 \text{ G}$ の場合： このときは, $\beta = \frac{P}{B_0^2/8\pi} = 0.03$ である。これからもわかるように Alfvén velocity $v_A (= \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}}) = 1328 \text{ km s}^{-1}$ は sound velocity $v_s (= \sqrt{\frac{P}{\rho}}) = 178 \text{ km s}^{-1}$ に比べて非常に大きい。計算の時間間隔 Δt はクーランコンディション $\frac{\Delta x}{\Delta t} > v_A$ より決まり, 我々は $\Delta t = 0.2 \text{ (sec)}$ とした。 $(\frac{\Delta t}{\Delta x} v_A = 0.83)$

結果は 図6.2 ~ 6.11 のようになる。注意すべきなのは, $t=7.05 \text{ s}$ の速度場(図6.3)の下部で著しい混乱しが生じているにもかかわらず, 1つおきにとった速度場が Nakagawa et al. の結果と非常によく似ていることである(図6.11)。また, 圧縮波の前後で電流の向きが異なるのも大きな特徴である(図6.8)。

$B_0 = 1 G$ の場合： このときは、 $\beta = 3$ であり、 Δt は音速より決まる。
 $\Delta t = 1.0 \text{ (sec)}$ とした。 ($\frac{\Delta t}{4x} v_s = 0.56$) 結果は図 6.13 のようになり
Nakagawa et al. の結果 (図 6.14) とは全く異なる。

(注) 誤差に関する述べておく。 hydrostatic からのそれは非常に小さく、誤差から生じる速度の大きさでいふと、1秒で 10 cm/s 以下。一方、磁場の誤差 (最初の current free からのそれ) は速度でいふと 1秒で 1 km s^{-1} 以下であった。 $(B_0 = 10 G \text{ のとき})$ ただし、LW 法による場合である。従って LW 法に限っていふと、数 10 km s^{-1} の結果は信頼できる。

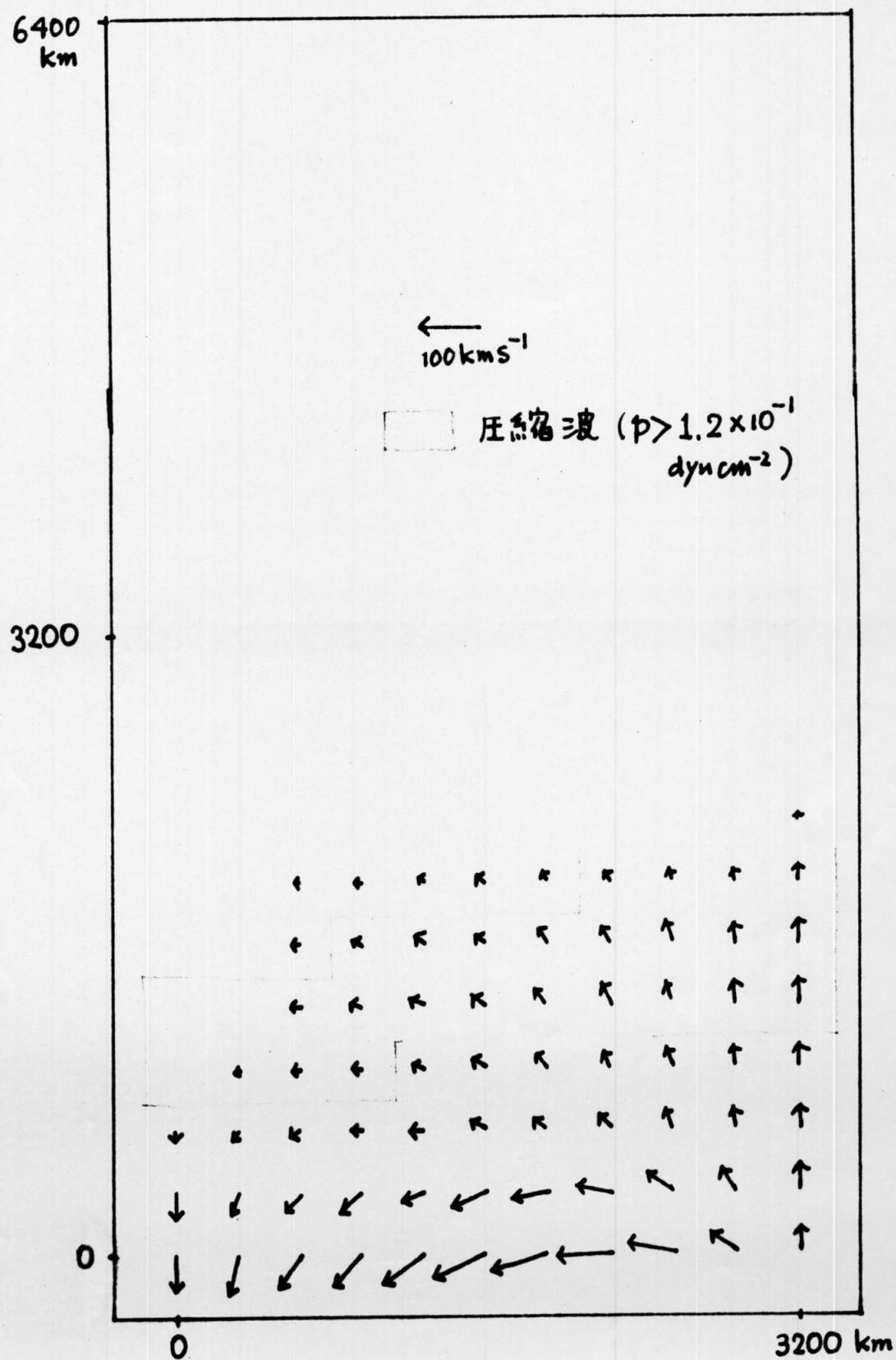


図6.2 速度場 ($B_0 = 10 G$, $t = 3.0 \text{ sec}$)

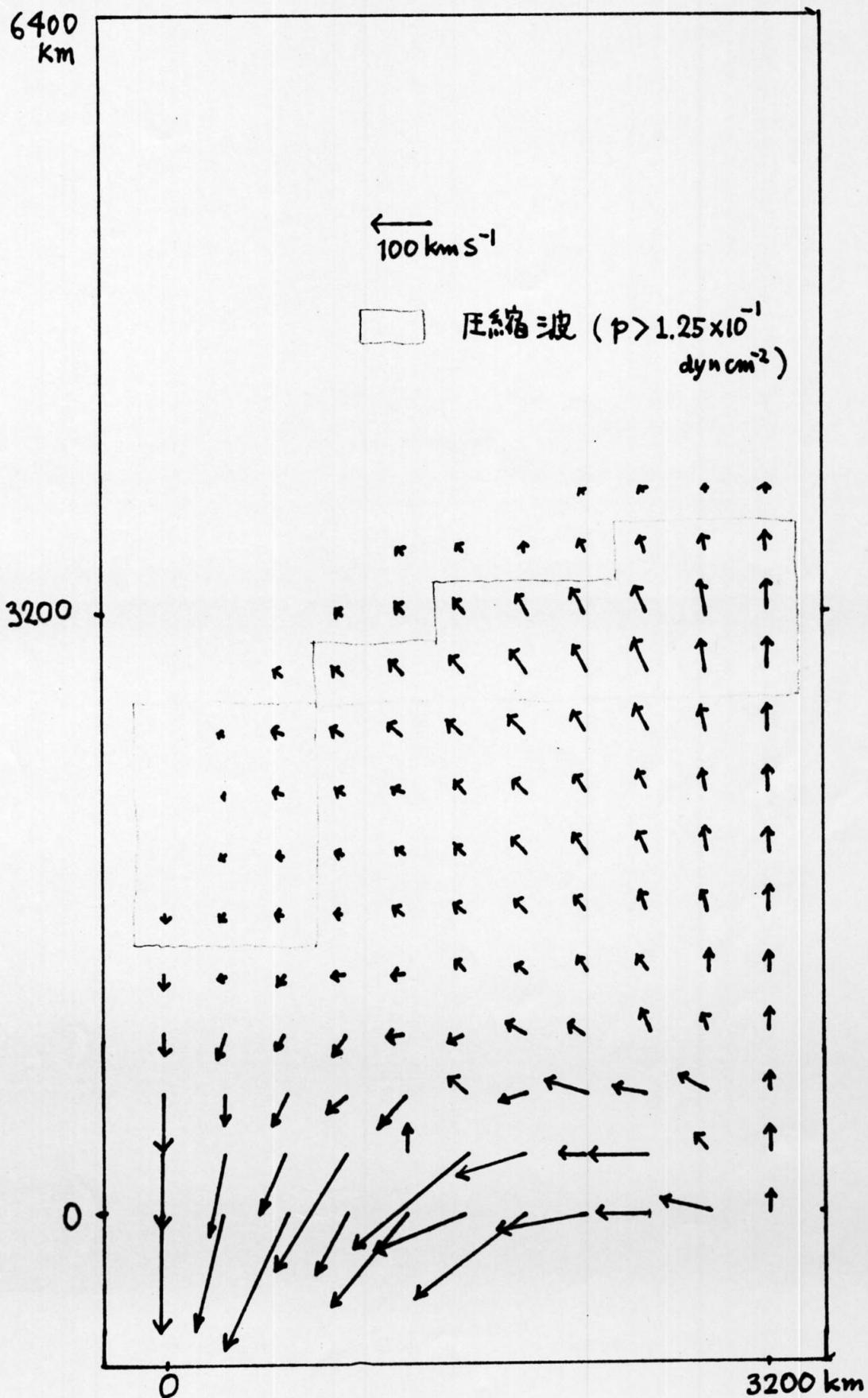


图 6.3 速度場 ($B_0 = 10 \text{ G}$, $t = 7.0 \text{ sec}$)

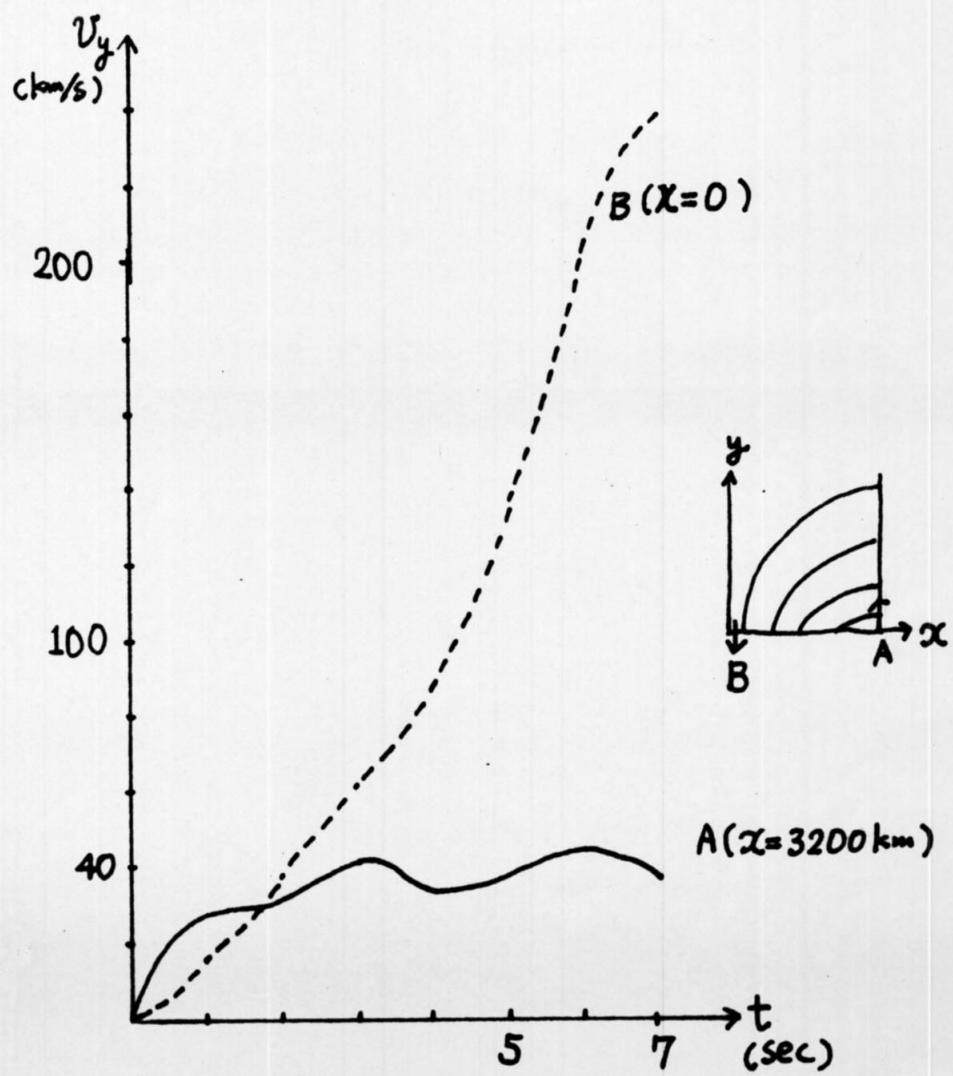


図6.4 速度(V_y)の時間的変化 ($B_0 = 10 G$)
(ただし、境界($y=0$)での値)

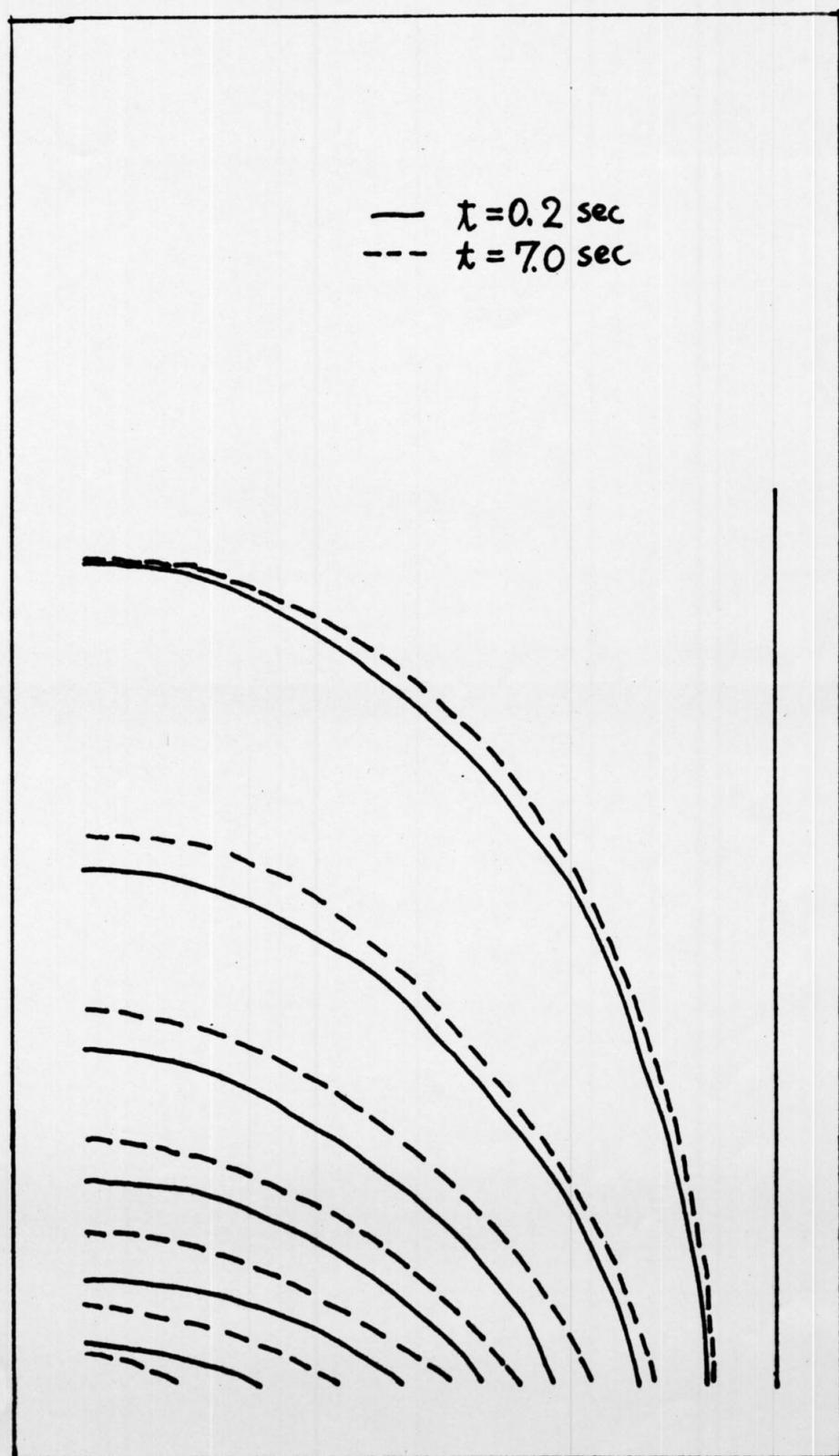


図 6.5 磁力線の変化 ($B_0=10G$, $t=0.2\text{s} \& t=7.0\text{s}$)

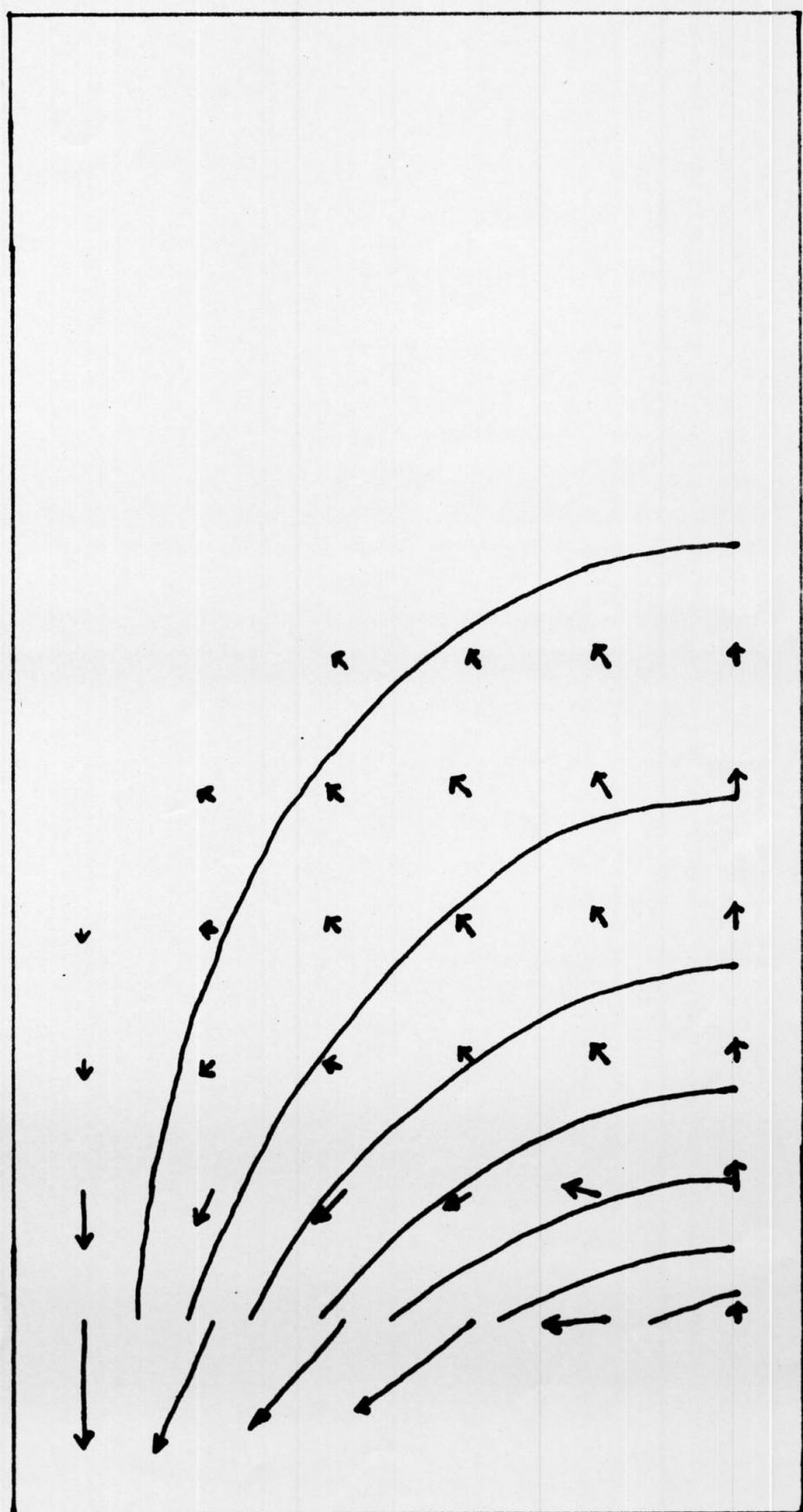
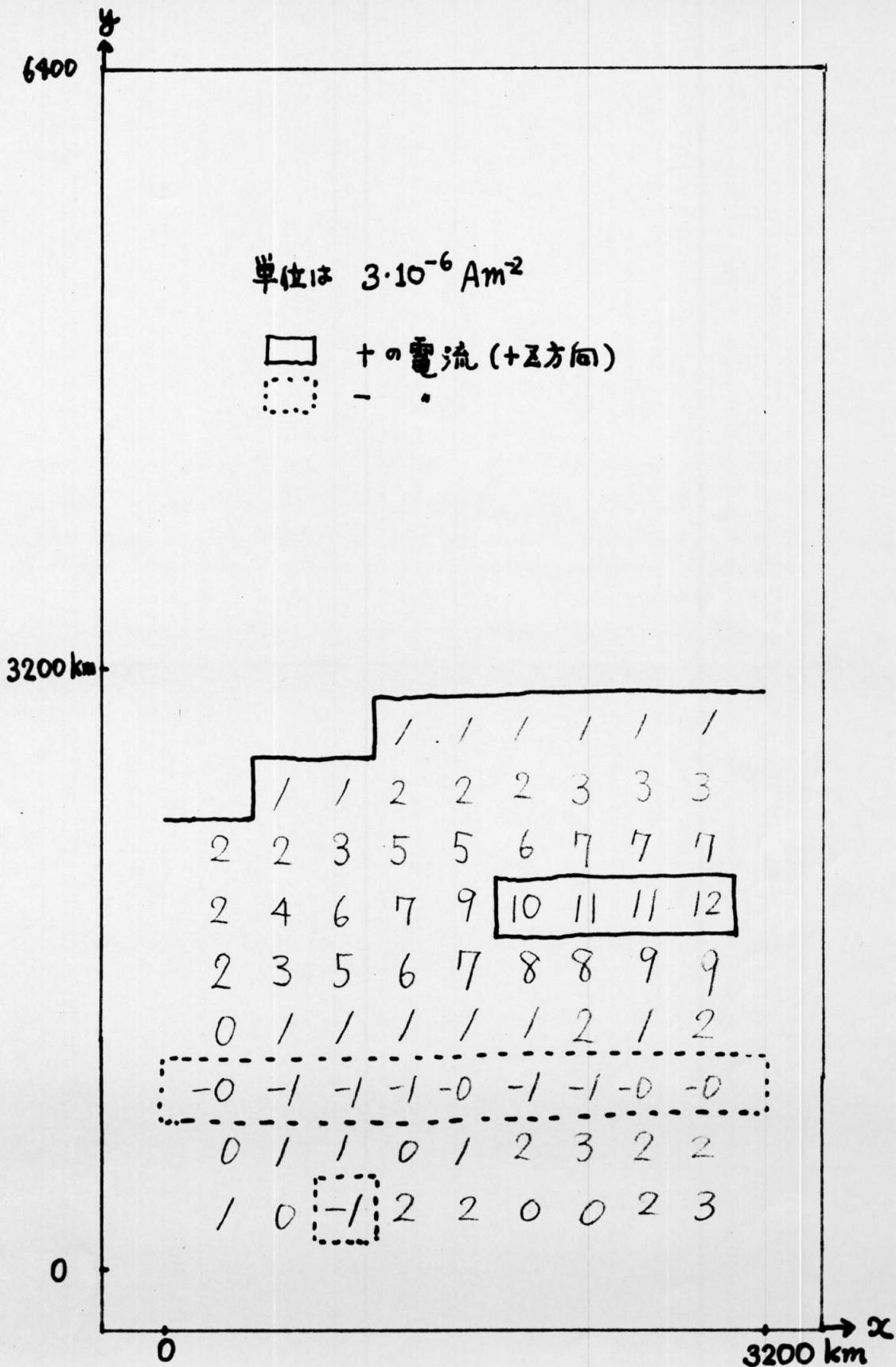
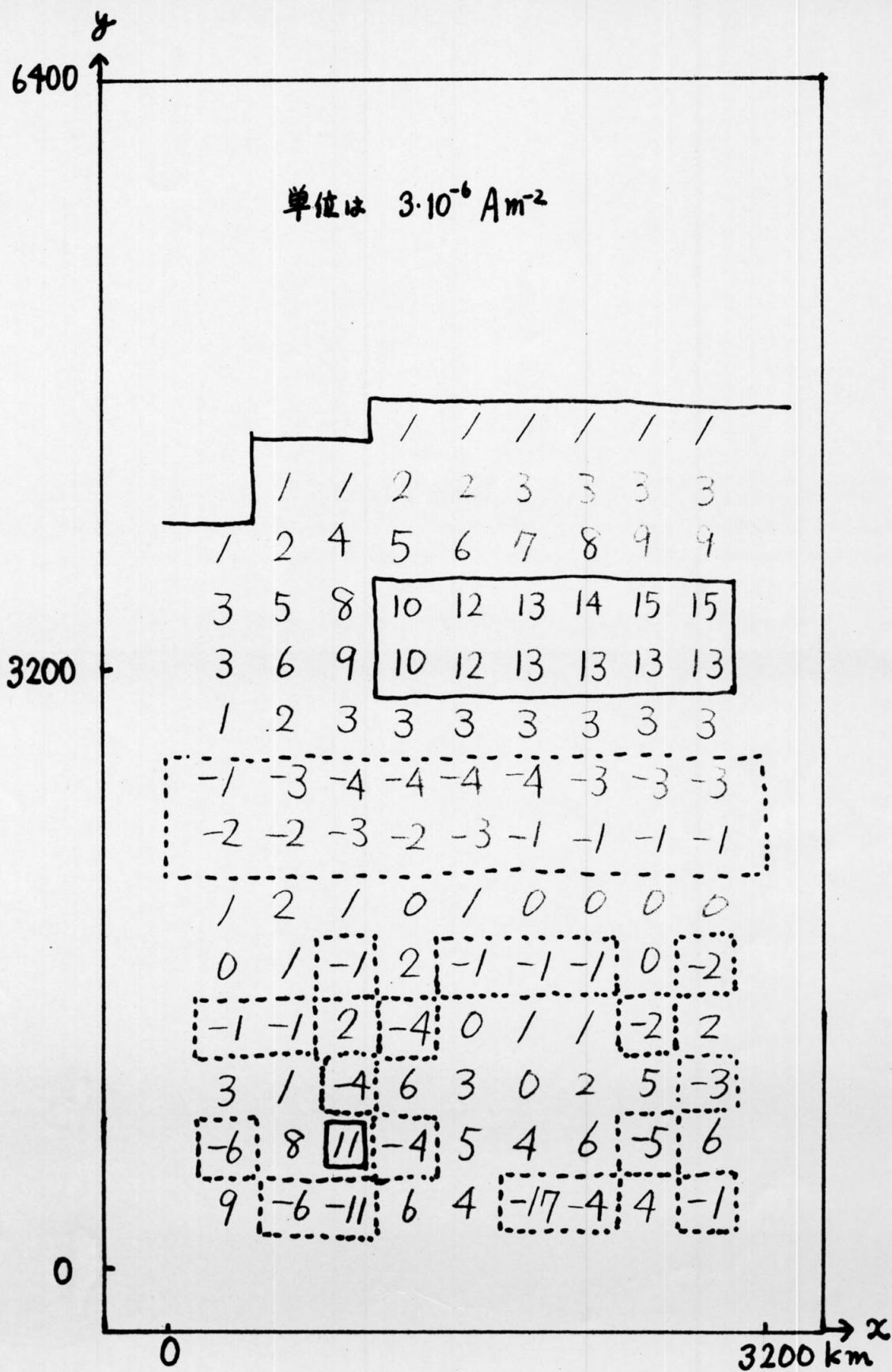
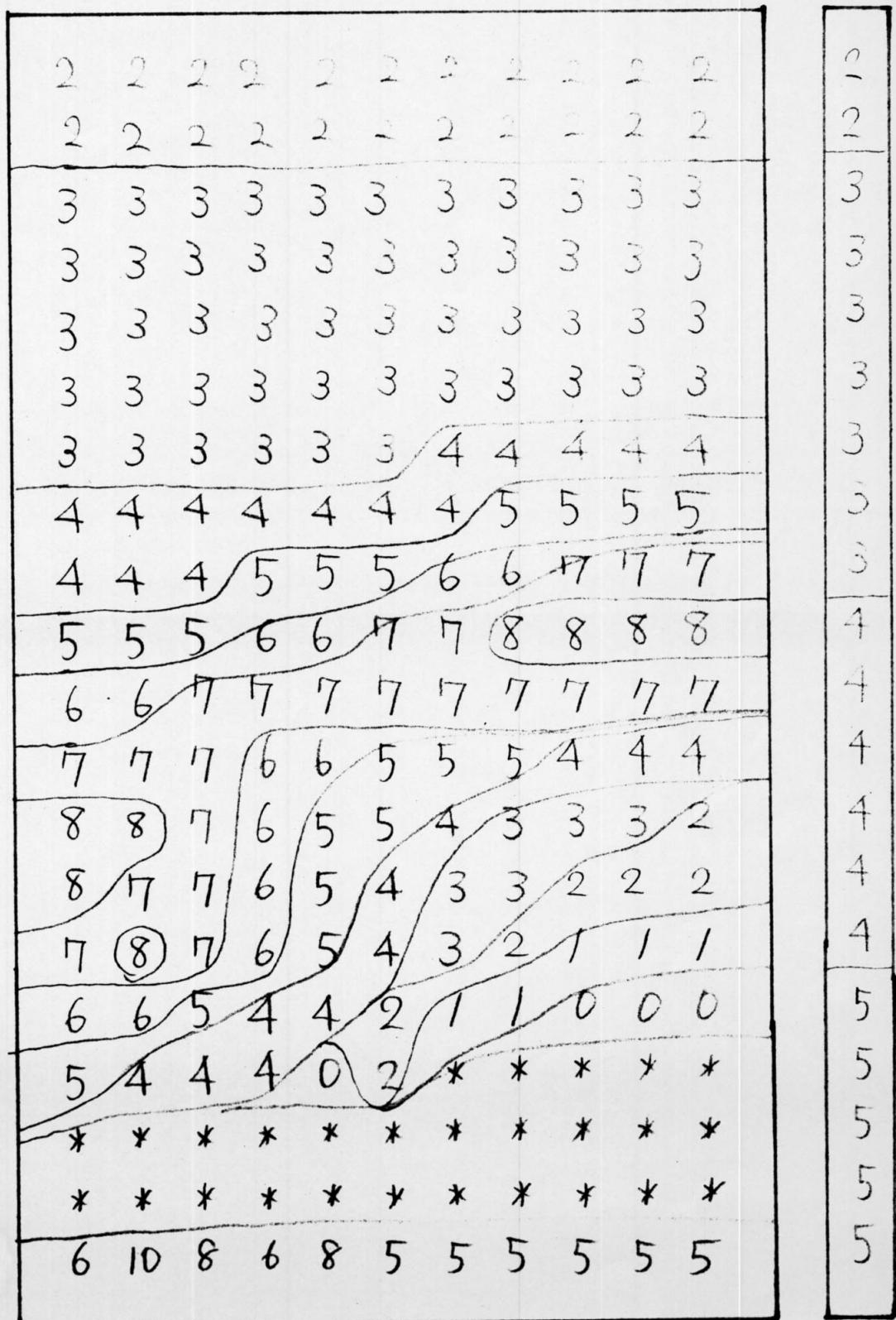


图6.6 速度场与磁场 ($B_0 = 10 G$, $t = 7.0 s$)

図6.7 電流分布 ($B_0 = 10\text{G}$, $t = 3.0\text{s}$)

図6.8 電流分布 ($B_0 = 10G$, $t = 7.0 s$)



(t=0s)

図6.9. 密度分布 ($B_0 = 10G$, $t = 7.0s$)

数字は $10^{27} (P - 4.0 \cdot 10^{-16})$ を表す。
 $(g cm^{-3})$

* は $P < 4.0 \cdot 10^{-16} (g cm^{-3})$

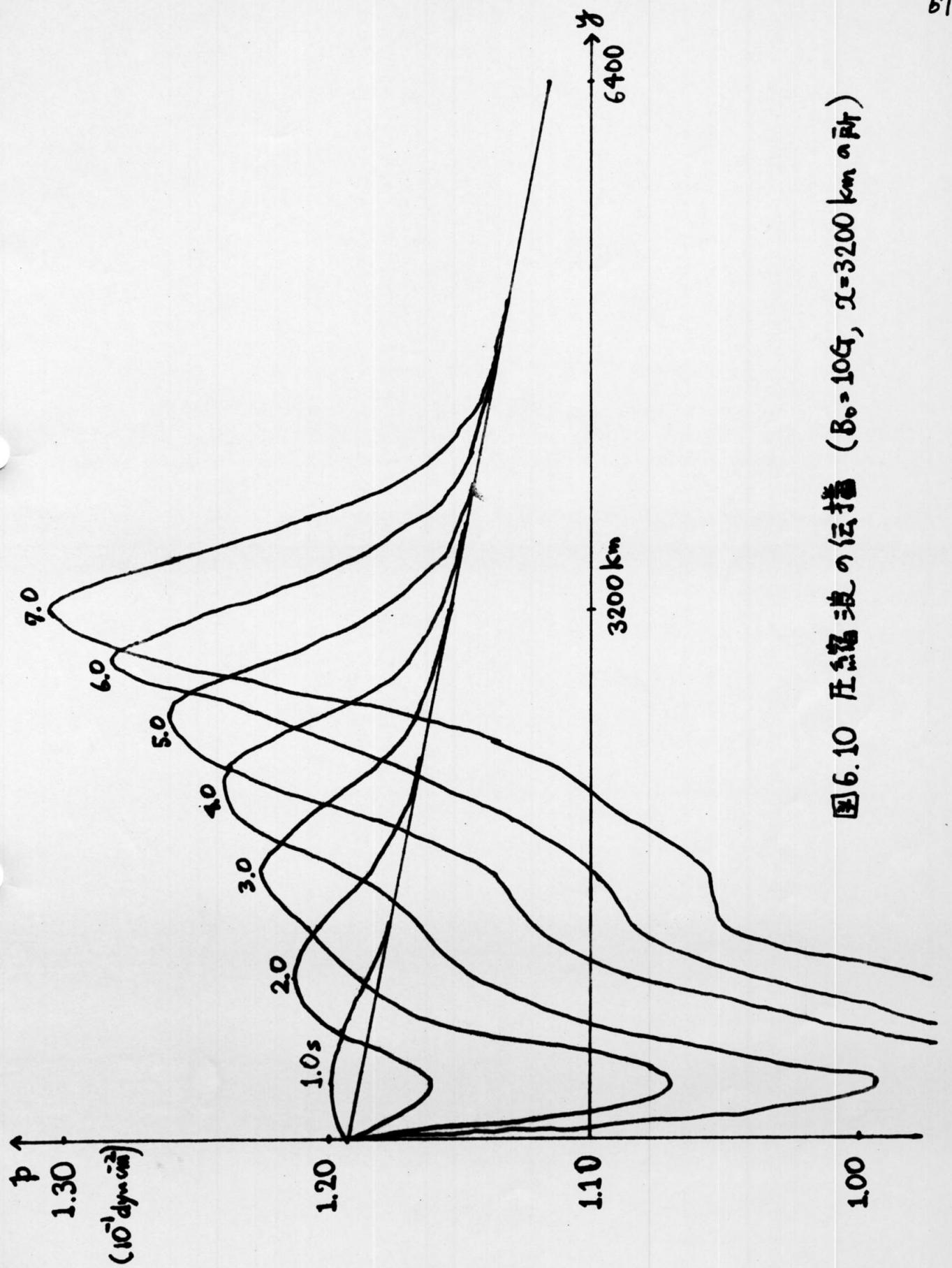
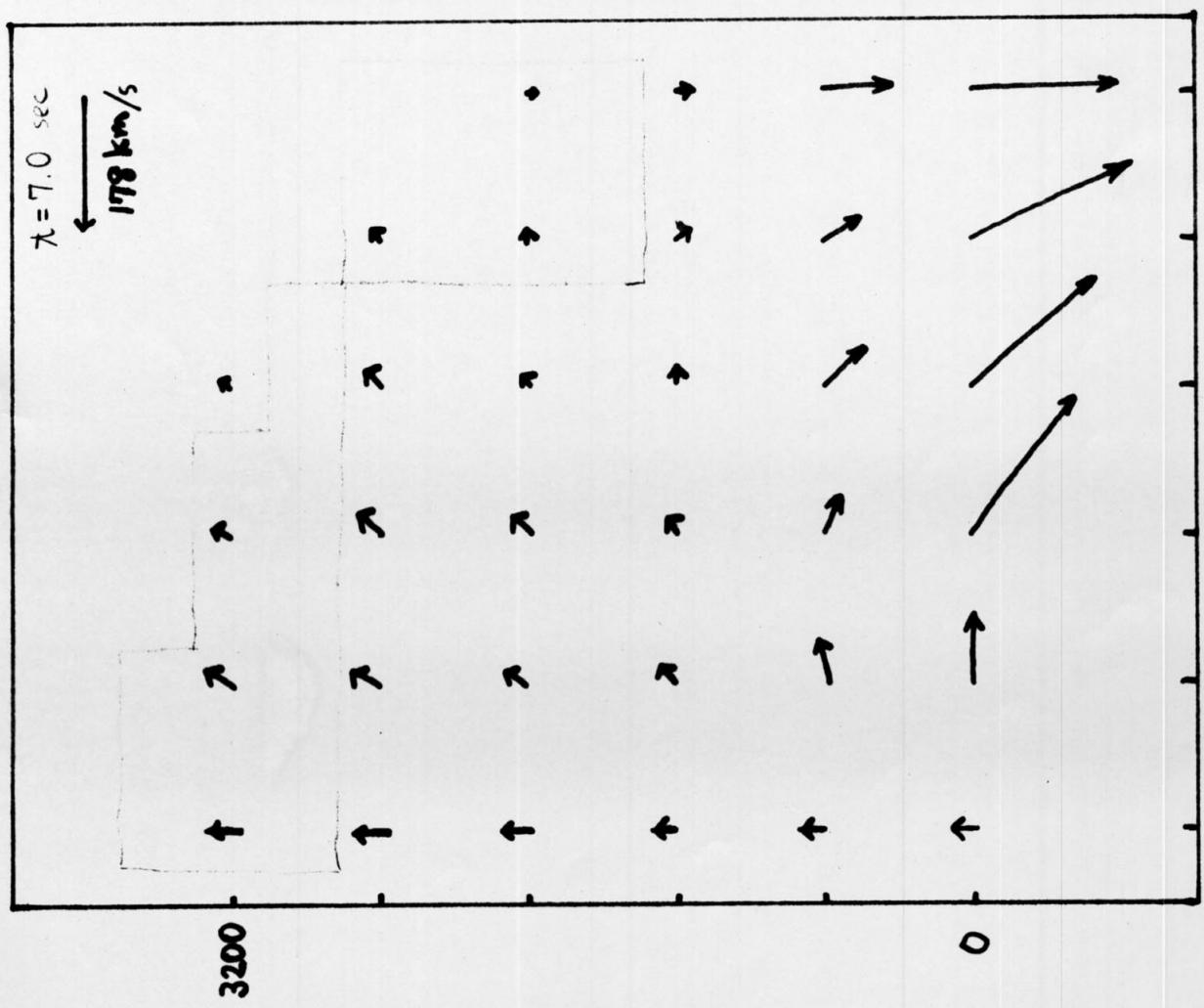
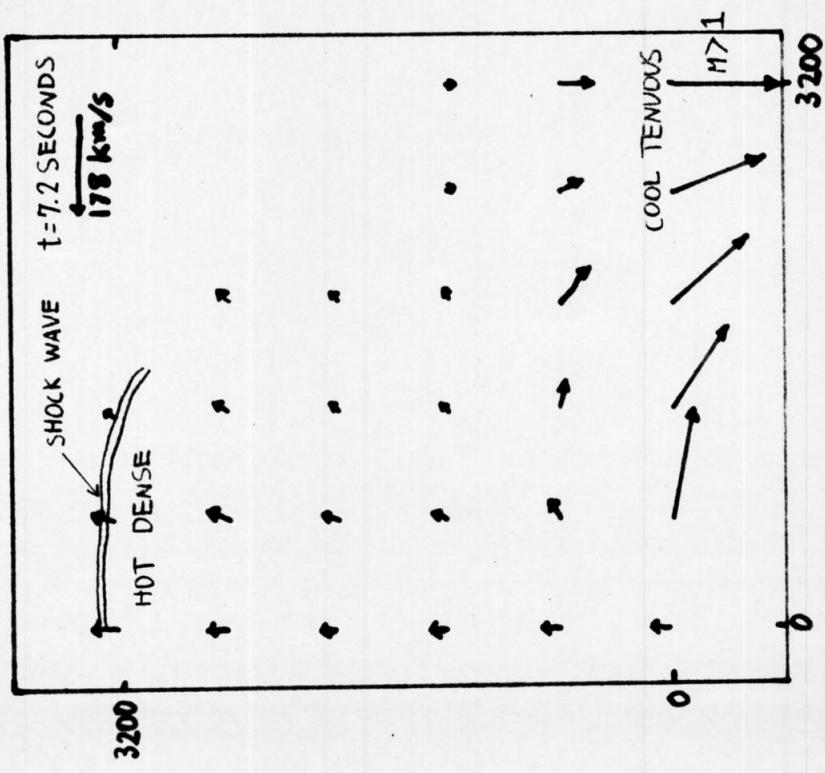


図6.10 壓縮波の伝播 ($B_0 = 10G$, $\lambda = 3200 \text{ km } \alpha \text{ p}_{\text{H}}$)



(a) Our Result (図 6.3 の 1 時間後)



(b) Nakagawa et al.

図 6.11 Nakagawa et al. (1976) の結果との比較 (Bo = 10 G)

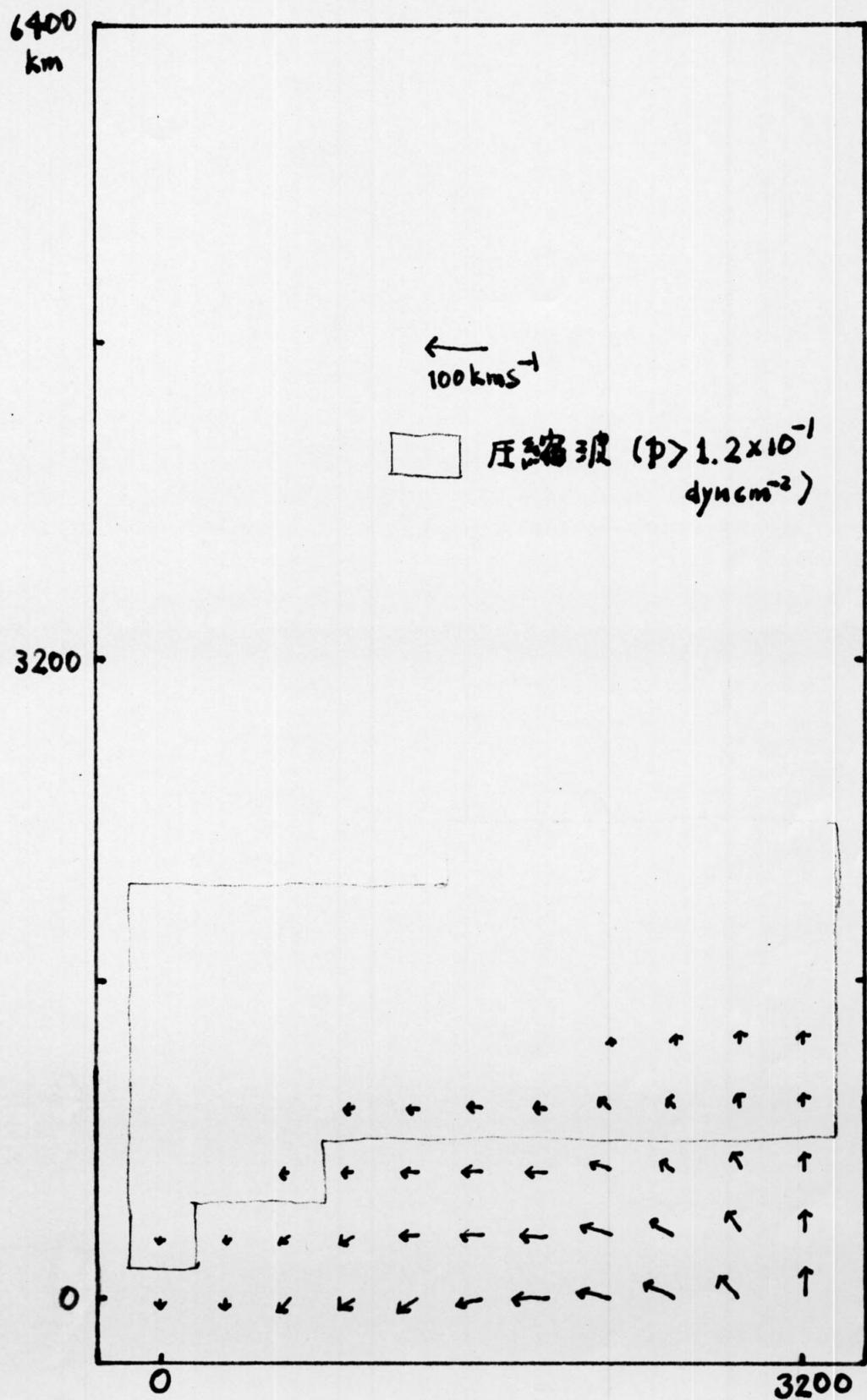
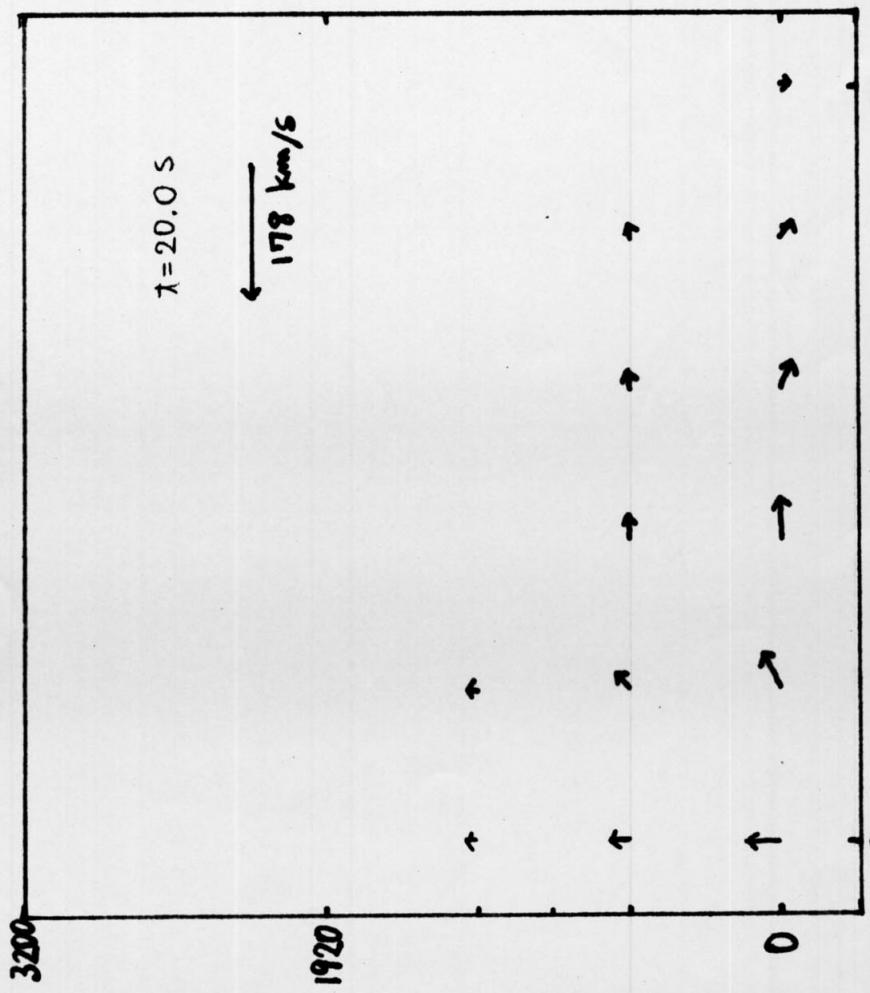
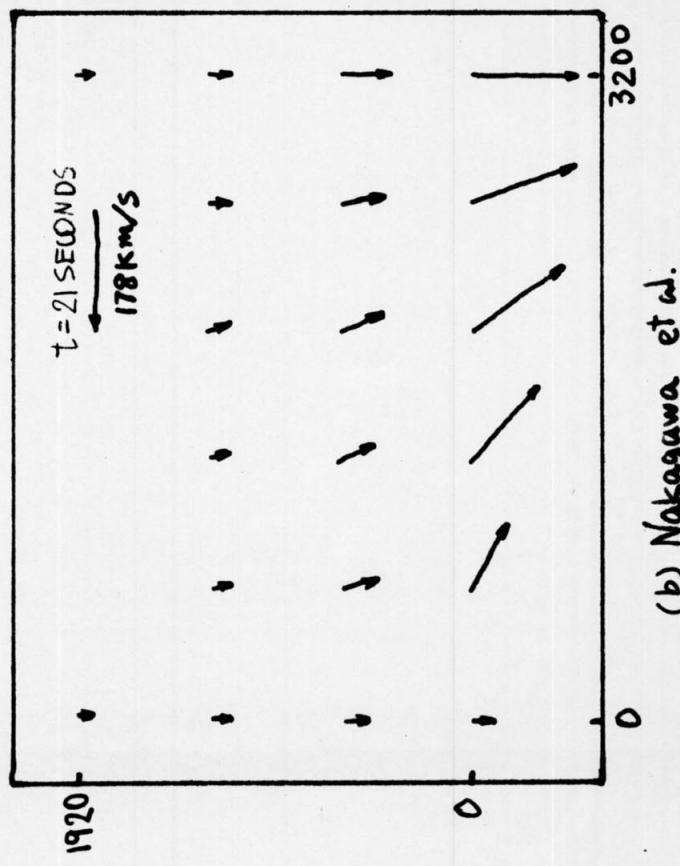


图 6.12 速度场 ($B_0 = 1G$, $t = 20.0 \text{ sec}$)



(a) Our Result (Fig. 6.12 a 1, 2, 3, 4)

図 6.13 Nakagawa et al. (1976) の結果と比較 ($B_0 = 1 \text{ G}$)



(b) Nakagawa et al.

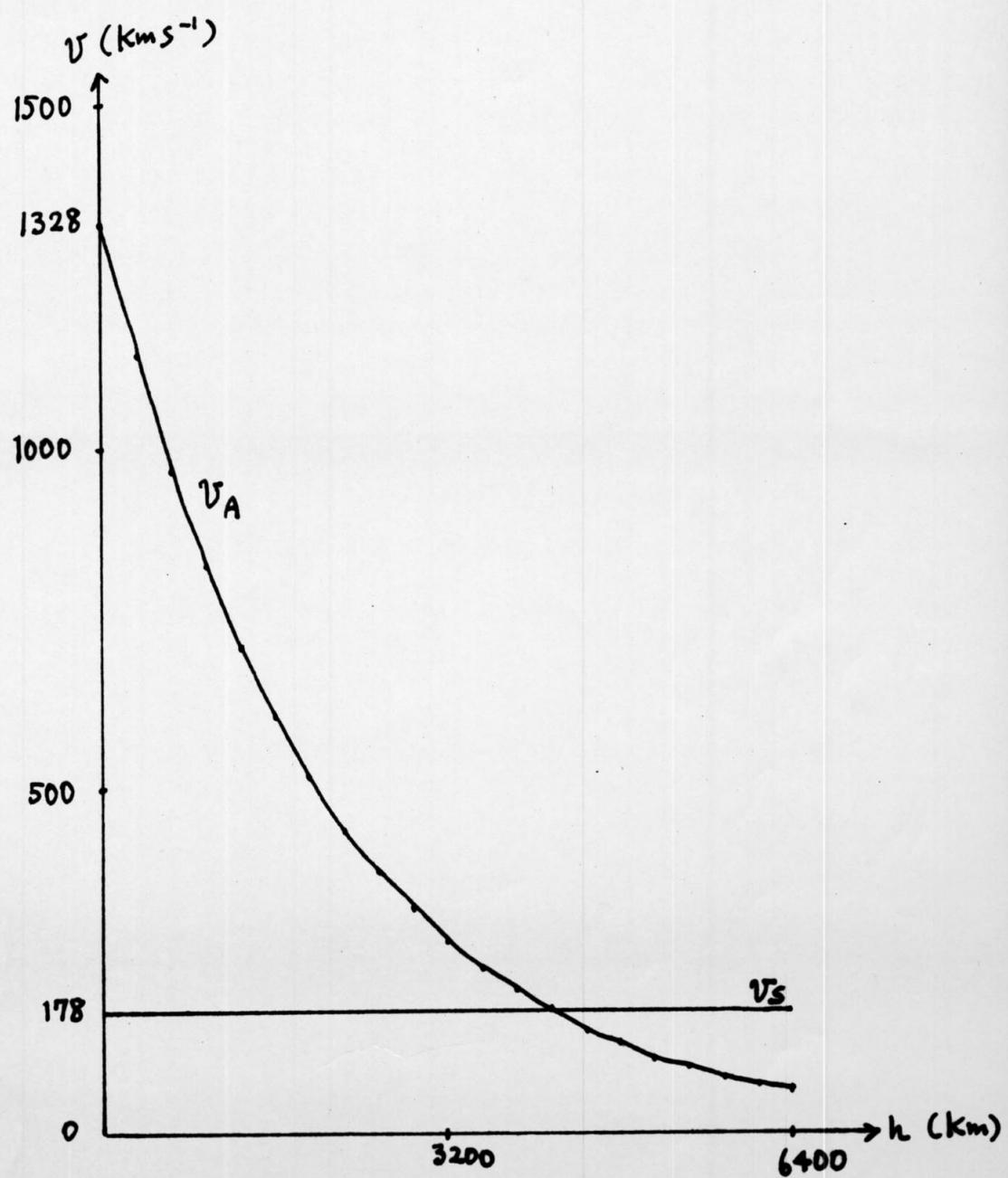


図6.14 コロナにおける Alfvén vel. & sound vel. ($B_0 = 10$ G とき)
 (v_A) (v_s)

6.2 Photosphere (Simulation of Kawaguchi and Kitai's Observation)

Kawaguchi and Kitai (1975) の観測 — down flow in the photosphere and the chromosphere (§2 参照) — を説明するために photosphere 及び lower chromosphere ($100 \text{ km} \leq h \leq 1100 \text{ km}$) において シミュレーションを行なった。ただし、後で述べるように、この領域ごとの MHD シミュレーションには大きな困難があり、まだ満足すべき結果は得られていません。ここで示すのは観測の situation とはおよそかけ離れた境界条件による計算結果である。

初期条件： hydrostatic, current free.

$\rho, p \dots$ HSRA model (§2)

scale height $\sim 100 \text{ km}$

$U = V = 0$

B ： §6.1 Corona と同じ形状。ただし, $B_0 = 100 \text{ G}$

$$\begin{aligned} \text{境界条件: } & \left\{ \begin{array}{ll} t \leq 10 \text{ sec} & \frac{dB}{dt} = 100 \text{ G s}^{-1} \\ t > 10 \text{ sec} & \frac{dB}{dt} = 10 \text{ G s}^{-1} \end{array} \right. \end{aligned}$$

この境界条件を 図 6.15 に示す。

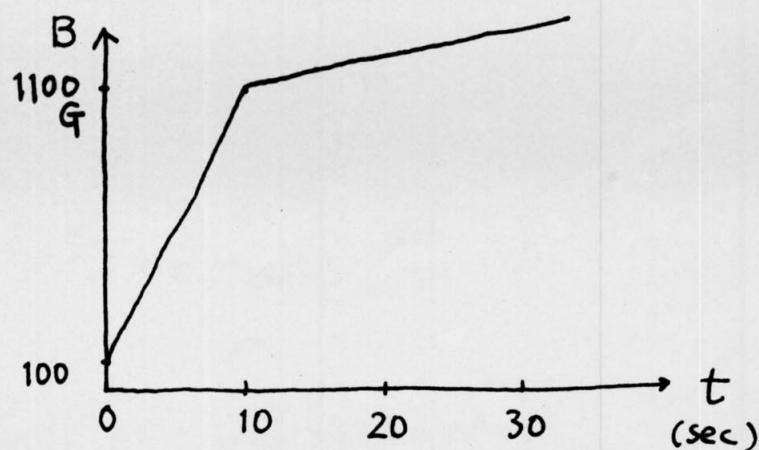


図 6.15 磁場 ($y=0$) の増大率

計算領域は x 方向(水平方向) 1500 km , y 方向 1000 km である
空間メッシュ幅 $\Delta x = \Delta y = 50 \text{ km}$ (30×20), $\Delta t = 0.5 \text{ s}$ とした。

($U_s \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.08$ at lower boundary, $\overbrace{U_A \frac{\Delta t}{\Delta x}}^{0.2}$ at upper boundary,
図 6.16 を見よ。)

シミュレーションの結果は、図 6.17 ~ 20 に示す。

(注) 誤差については、§7.3 に詳しい数値が述べられている。ここでは
これらの結果が hydrostatic からのずれによる速度場に埋もれて
しまわないギリギリのものであるということだけ述べるにとどめておく。

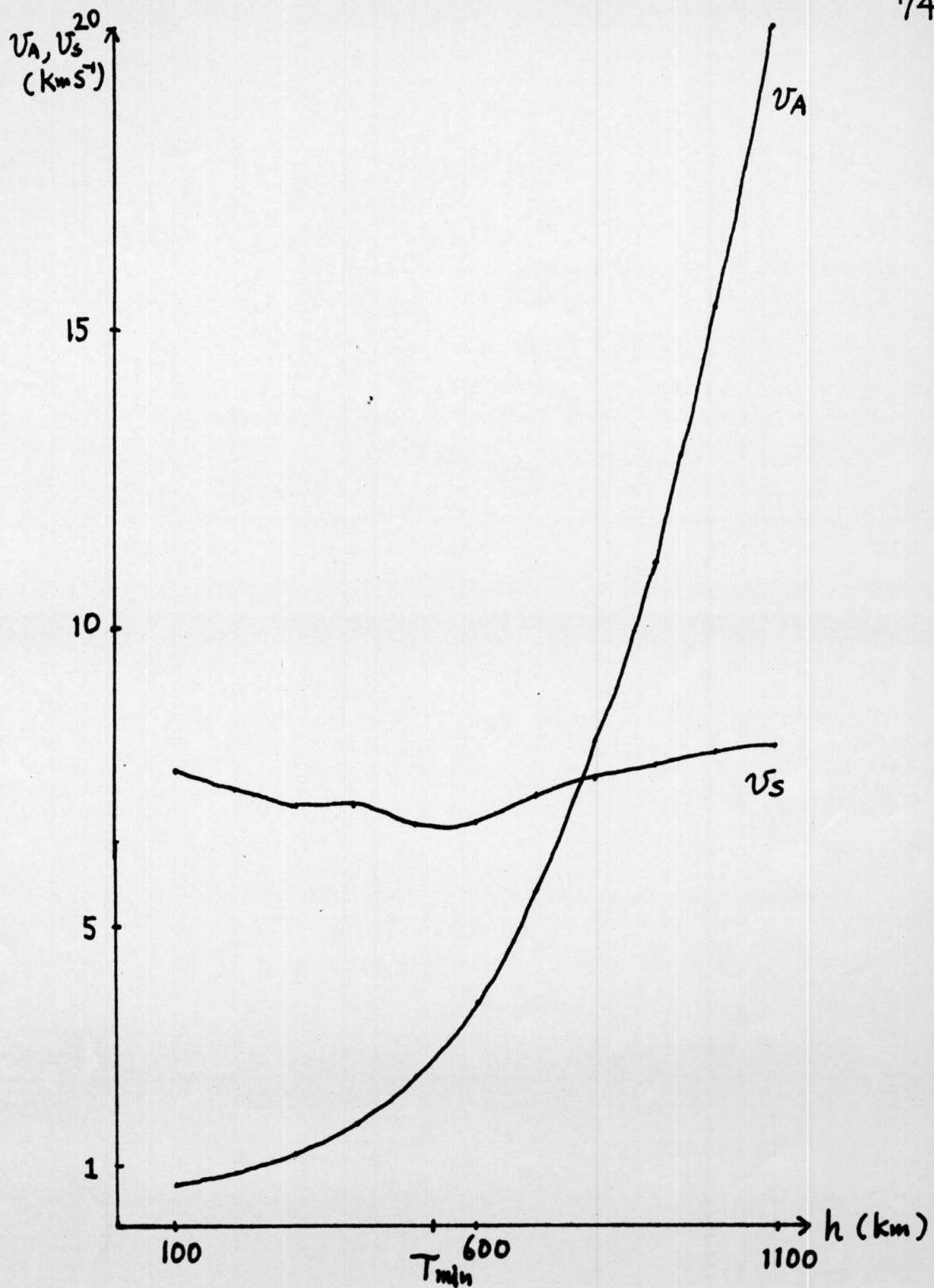


图 6.16 photosphere and lower chromosphere 1=Alfvén vel. v_A
2=sound vel. v_s

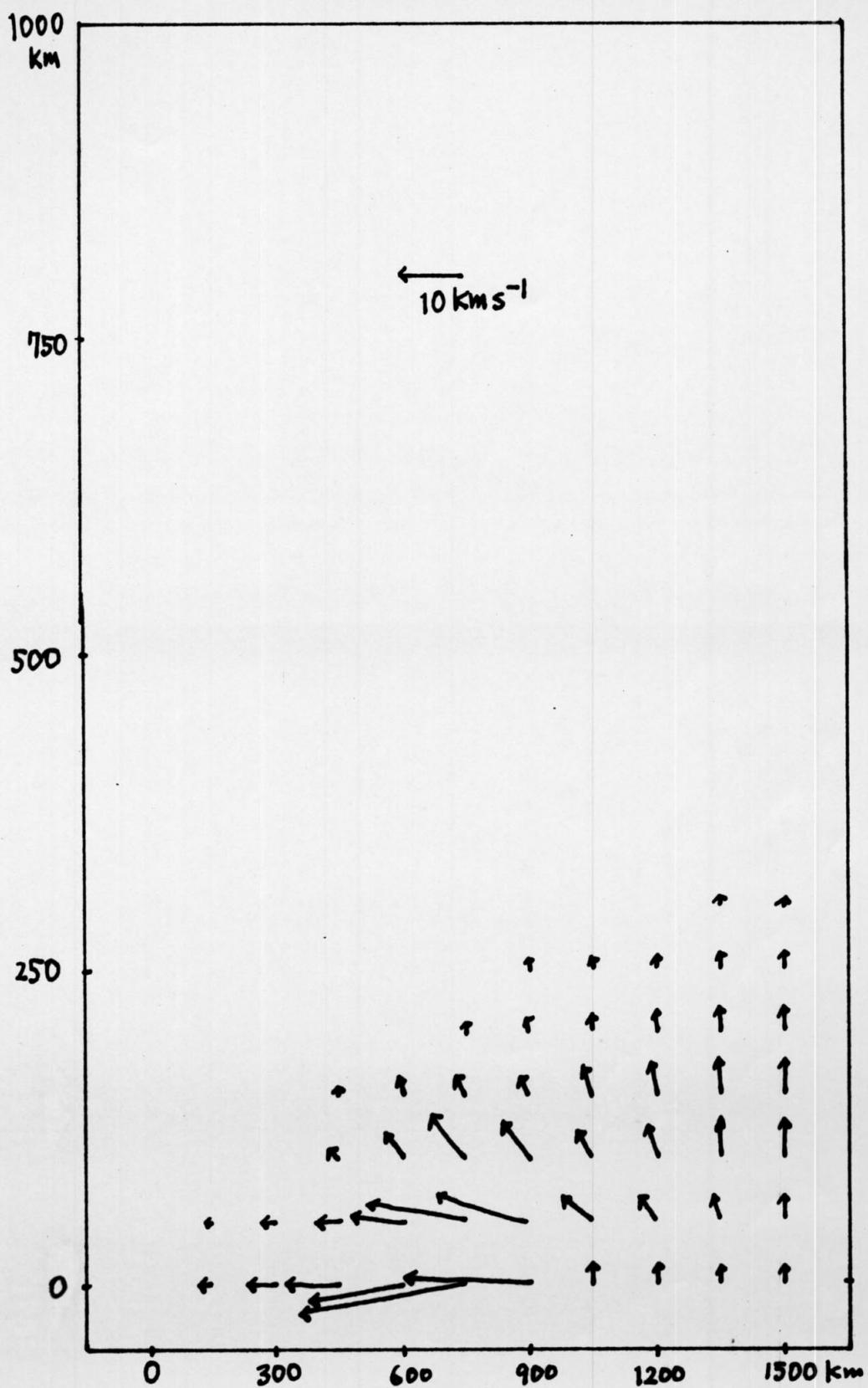


図 6.17 速度場(光球, $\Delta = 35 \text{ sec}$)

(注, タテとヨコのスケールがちがうことに注意せよ。ただし, 実際の計算は正方形 メッシュである)

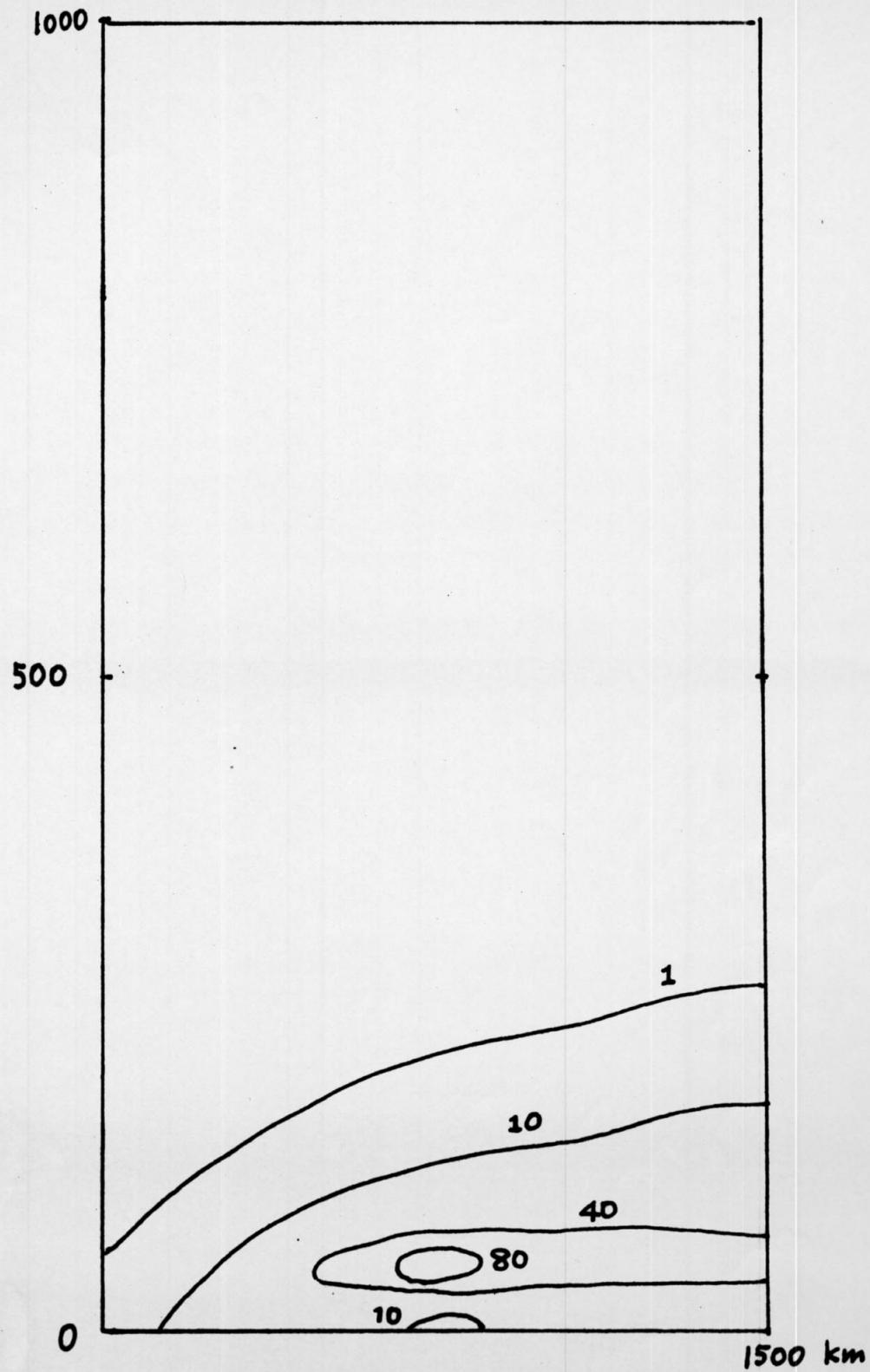


図 6.18 電流分布 (光球, $t=35$ sec)

単位は $2 \times 10^{-2} \text{ Am}^{-2}$

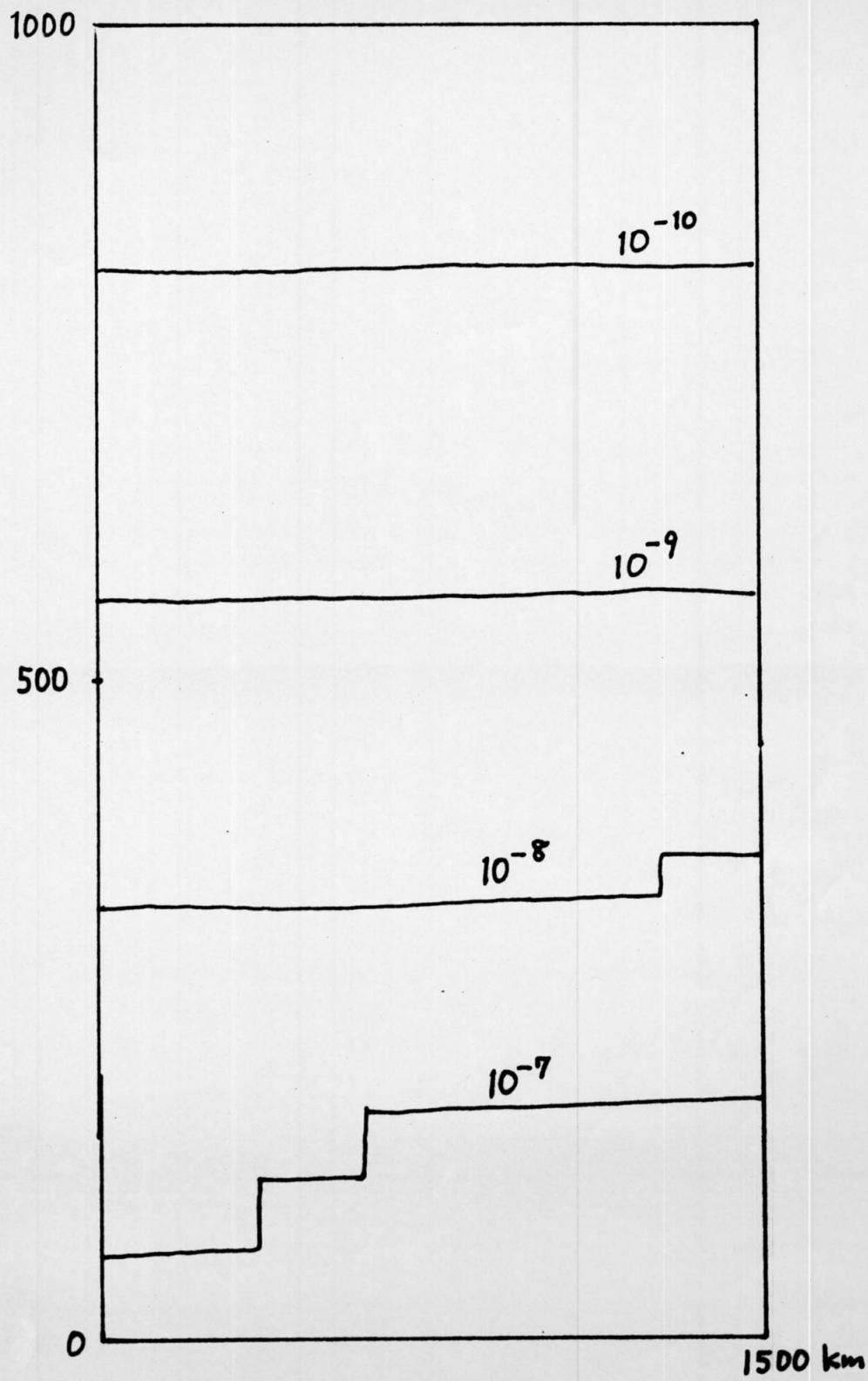


图 6.19 密度分布 (光球, $t=35.0 \text{ sec}$)

单位是 g cm^{-3}

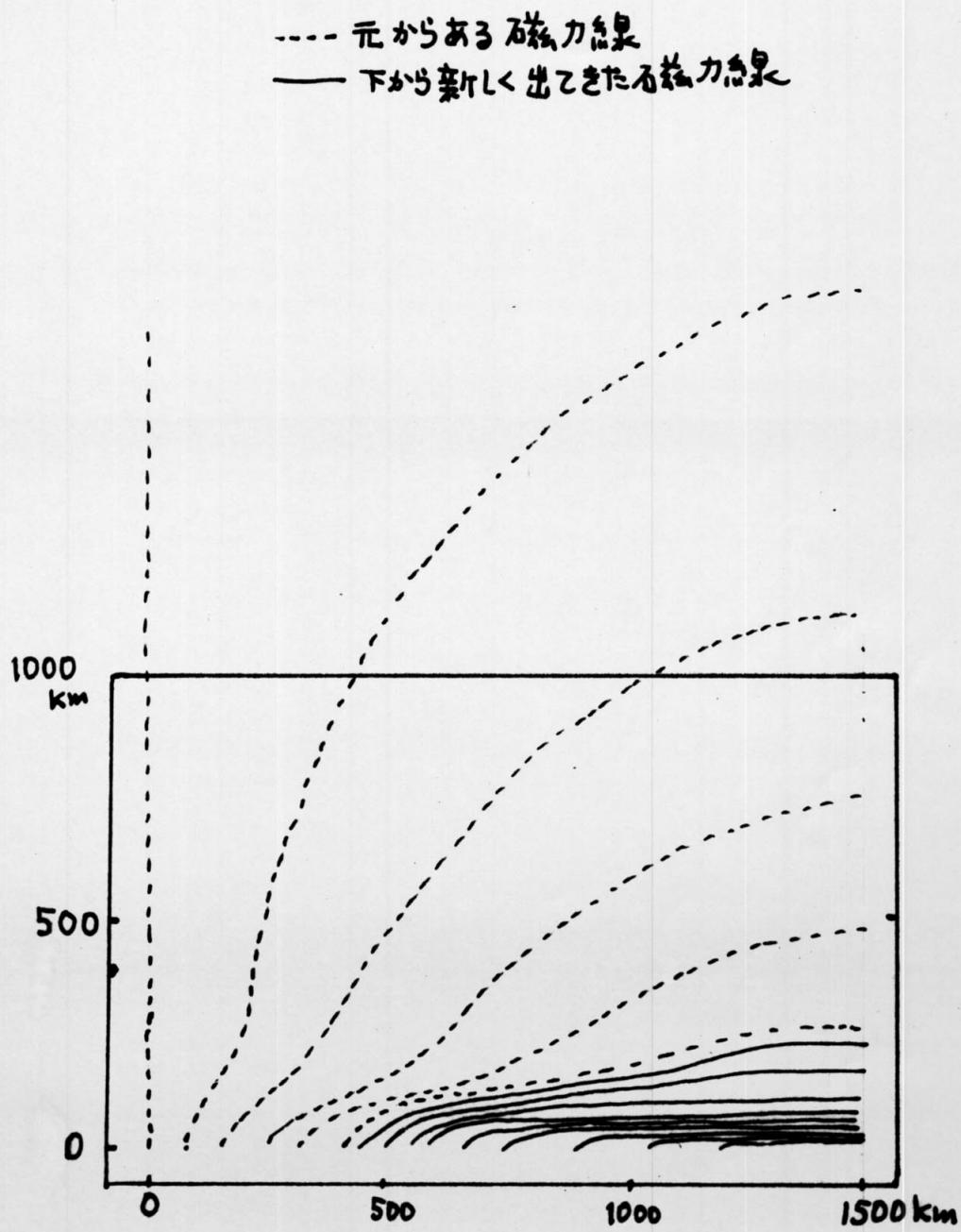


図6.20 磁力線 (光球, $t=35.0\text{ sec}$)

これは計算結果をもとにした想像図である。
あまり正確ではない。

§7. Discussion

7.1. Reliability of MHD code

MHDコードの信頼性を調べるというのは、なかなか困難なことである。比較すべき2次元解析解は、定常解しかないし、定常解ごとにチェックには無力である。(Roache, 1972)

そこで、他人の計算結果(我々の場合 Nakagawa et al. (1976))と比較することによって、信頼性をチェックするという方法を取りざるを得なくなる。わけだが、他人の計算結果の信頼に疑問が残る以上、同じ結果が得られたとしても、信頼性の根拠としては、はなはだ“頼りないものにしかなりえない。

さらに、§6で示したように、我々の結果では、 $B_0 = 10\text{G}$ のときは Nakagawa et al. とかなりよい一致を示すが、 $B_0 = 1\text{G}$ のときは全く異なる。このようなときはどのように判断すればよいのである。いちがいの原因は、おそらく、境界条件の決定法(§5.4)にあると思われるが、これからただちに我々の方法が誤りであるとは言いきれない。なぜなら、我々の場合 $B_0 = 1$ と 10 で“ほぼ”似たような結果を示しているのに、Nakagawa et al. では $B_0 = 1$ のとき全体が下降するという一見奇妙なふうまいを示している。この Nakagawa らの結果は、おそらく上昇した磁力線がある高さの所で“強く圧縮された結果下向きの力が発生し、これが”境界条件の変化による上向きの力に打ち勝つようになつて下降流となつものと思われるが、この下降流が“現実的なものかどうかについては、疑問が残る。

我々の MHD コードの最大の欠点は、むしろ、 $B_0 = 10$ の $\Delta t = 7.0\text{ sec}$ (図 6.3) に見られる解の不安定性である。これはメッシュが“粗いため(空間 10×20 、時間 $\Delta t = 0.2\text{ s}$)”か、境界条件の決定法によるものかは、まだよくわかつていながら、境界近傍だけに発生していることから、境界条件

と深い関係があるのは、疑いない。（式みに同じメッシュで $\Delta t = 0.05s$ にしてやった場合にも、少し小さくなたけれども同じような不安定性は存在した。）

境界条件の決定法の問題点をあげると、まず、最初に、空間2次元の混合初期値境界値問題における境界条件の決定法が“完全に解決できていない”ということがあげられる。これは非常に興味深い問題であると同時に、多次元双曲型方程式の数値シミュレーションにおける最大の難所でもある。この問題が“解決できれば、境界面による音波、Alfvén 波の反射による instability の発生を防ぐことが”でき、数値計算上の制約が著しく緩和されることになる。我々は、この問題の解容として、満足できる結論をまだ得てないので、次善の策として 95.4 で述べた方法を考案したわけである。しかし、この方法の中にも多くの問題点がある、次のようになる。

(1) 任意に決定できる量については、前の時間のまま固定したか、任意性の判断に疑問が残る以上、これらも速度と同様に外挿で決めた方が“よいのか”ないか？ そして、外挿の仕方に“よい”か？

(2) 流線の足の量の決定法（内挿）は“よい”か？

7.2 Rising Magnetic Flux Tubes in the Corona

計算結果によると、 $B_0 = 10 \text{ G}$, $\frac{dB}{dt} = 0.17 \text{ GS}^{-1}$ のとき、 $t = 7.0 \text{ sec}$ で上昇流の速度は約 40 km s^{-1} 、下降流の速度は最大 200 km s^{-1} であった（図 6.3）。この下降流の速度は、境界条件の決定法に強く依存しているため、現実にこのような速度が生じうるかという点については問題はあるが、次のような物理的解釈が可能である。

(1) 重力による落下ではない。なぜなら、たとえ free fall であつても落下速度は最大 $V = g t = 2.74 \times 10^4 \times 7.0 \sim 2 \text{ km s}^{-1}$ (cm/s) しかならない。

(2) 下降流は、磁力線の上昇とともに磁束チューブの断面積の減少で“物質が”絞り出された結果と解釈できる。これは図 7.1 のようなモデルを考えるとよくわかる。すなわち、非圧縮

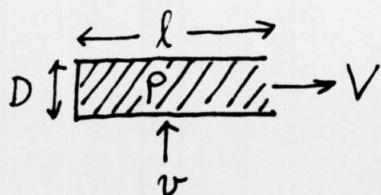


図 7.1 磁束チューブの圧縮

を仮定、図 7.1 のようにチューブを圧縮してやると質量保存より $lV = DV$ 、よって $V = \frac{l}{D}v$ 。我々のコロナのモデルでは、 $l \sim 1000 \text{ km}$, $v \sim 40 \text{ km s}^{-1}$, $D \sim 200 \text{ km}$ ので $V \sim 150 \text{ km s}^{-1}$ となる。

一方、上昇流の速度は、 $\frac{dB}{dt} = 0.17 \text{ GS}^{-1}$ の増大率で磁場を増大させたときの真空中における磁力線の上昇速度として理解できる、といふことを次に示す。これはコロナのガスが“磁場に及ぼす影響を全く無視する”という仮定が、 $P \ll \frac{B^2}{8\pi}$ ($\beta = \frac{P}{B^2/8\pi} = 0.03$) のときは、それ

ほど悪くない仮定であるということを意味する。磁力線の上昇速度を求めるために、magnetic stream function $A(x, y)$ を導入する。これは、次の式で定義され、磁力線に沿て一定な量である。

$$\frac{\partial A}{\partial x} = B_y \quad , \quad \frac{\partial A}{\partial y} = -B_x \quad (7.1)$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla A = 0 \quad (7.2)$$

B_x, B_y は §6 で与えた式

$$\left. \begin{aligned} B_x &= B_0 \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x_m} \right) \exp \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{x_m} \right) \\ B_y &= B_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x_m} \right) \exp \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{x_m} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

であり、 A は容易に

$$A(x, y) = \frac{2x_m}{\pi} \cdot B_0 \cdot \text{[redacted]} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x_m} \right) \exp \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{x_m} \right) \quad (7.4)$$

と求まる。ただし、 $A(0, 0) = 0$ と仮定した。さて、真空中での磁力線の上昇は、

$$A(x, y, t) = \frac{2x_m}{\pi} B_0 (1 + \alpha t) \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x_m} \right) \exp \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{x_m} \right) \quad (7.5)$$

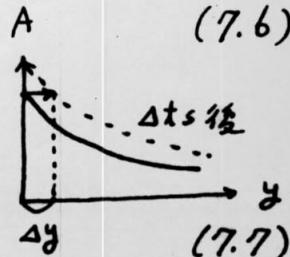
で決められるとすると (§6.2)、上昇速度 v は、 A のある値が Δt 秒後に Δy まで進むときの平均速度 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ として決定できる。つまり、

$$A(x, y, t) = A(x, y + \Delta y, t + \Delta t) \quad (7.6)$$

より

$$\frac{\partial A}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t = 0$$

$$\text{ゆえに } v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\frac{\partial A}{\partial t} / \frac{\partial A}{\partial y}$$



(7.5) を (7.7) に代入すると、

$$v = \frac{2x_m}{\pi} \cdot \alpha \cdot \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x_m} \right) \right]^{-1} \cdot \exp \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{x_m} \right) \quad (7.8)$$

ここに、我々のモデルの値 $x_m = 3200 \text{ km}$, $\alpha = 0.017 \text{ s}^{-1}$ を代入すると
磁力線の頂点 ($x = x_m, y = 0$) では

$$v \sim 35 \text{ km s}^{-1}$$

となる。これは、計算結果の上昇速度 $v \sim 40 \text{ km s}^{-1}$ とかなりよく一致して

いる。従て、上昇流の速度はほぼ“磁力線の真空膨張速度を表わしている”と結論できる。

Nakagawa et al. はフレアの model として、コロナ中を上昇する磁束チューブのシミュレーションを行なったが、ここでは Active Region のコロナにおける進化という観点から計算結果を見直してみる。磁束チューブがコロナに突入した直後、つまり AFS が初めて出現した直後、Soft X-ray の観測によると、small bright point (サイズ $\sim 10^4$ km) が“出現し、 $T \sim 3 \times 10^6$ K, $n_e \sim 10^{10}$ cm $^{-3}$ である (§2.3)。我々の計算結果によれば、図 6.9 のように磁束の上昇のために磁力線に沿った形で“high density region”ができる、そこには回りに比べて高温である。ただし、密度、温度の増加は、それぞれ、わずか 10%, 2% なので、観測の 2 倍、100 倍とはおよそかけ離れている。この理由は、adiabatic を仮定したこと、未知の heating ファクタスムの存在、など“のため”であろう。

7.3 Rising Magnetic Flux Tubes in the Photosphere

Kawaguchi and Kitai (1975) の観測によれば、磁束チューブの上昇速度は 0.5 km s^{-1} 以下であり、物質の落下速度は最大 1.5 km s^{-1} である。しかし、我々の途中結果 (§6.2) では上昇流 5 km s^{-1} 、下降流なしとなっている。これは、境界条件の磁場の増大率 $\frac{dB}{dt} = 100 \text{ G s}^{-1}$ が大きすぎることと、計算時間の短かさ ($\Delta t = 35 \text{ sec}$) のためである。実際の増大率は $\frac{dB}{dt} = 1000 \text{ G/hr} \sim 0.3 \text{ G s}^{-1}$ 、磁束が“上昇”し始めてから下降流が“生じる”まで約 1 時間 (3600 sec) の程度であると思われるが、この場合のローレンツ力は $\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta x} \cdot B \sim 5 \times 10^{-6} \text{ dyn cm}^{-3}$ ($\Delta B = 0.3$, $B = 1000$, $\Delta x = 5 \cdot 10^6 \text{ cm}$ …… $30 \times 20 \times \text{メッシュのとき}$) であり、これは hydrostatic からのずれ (打ち切り誤差)による力 $\sim 1 \times 10^{-5} \text{ dyn cm}^{-3}$ に比べて小さいので、 $30 \times 20 \times \text{メッシュ}$ では計算不可能 (すべての変化が誤差の中に埋もれてしまう) ということになる。従って、観測を説明するためには、垂直方向のメッシュを少なくとも 100 ($\Delta y = 10 \text{ km}$) としなければならない。このときは hydrostatic からのずれによる力 $\sim 5 \times 10^{-7} \text{ dyn cm}^{-3}$ である。しかし、この場合でも time step が“多くなると、誤差の集積が“生じるため、 3600 sec の計算 ($\Delta t = 1.0 \text{ sec}$ として 3600 step) は、きわめて非現実的であるといわざるを得ない。(仮りに $30 \times 100 \times \text{メッシュ}$, 1000 step でやれるとしても、CPU time は 10000 秒 ~ 3 時間 である) 時間間隔 Δt を大きくすると“こののは、Lax-Wendroff 法でやる限り、クラン条件 $\frac{\Delta x}{\Delta t} > \max(v_A, v_s)$ のため不可能である。

以上のような、数値計算上の重大な困難のために、観測と比較可能な計算結果はまだ得られていないが、観測された 1.5 km s^{-1} の下降流は磁束チューブによく持ちあがられた重い photosphere の物質 ($10^{-7} \sim 10^{-8} \text{ g cm}^{-3}$) が chromosphere ($10^{-10} \text{ g cm}^{-3}$) あたりで重力によって落ちている所と解釈するのが最も自然である。(これを直接

シミュレーションで"示すのが", 当初の目的であった。)

コロナにおける磁束チューブの上昇との明瞭なちがいは, scale height の差 (コロナ - 10万km, 光球 - 100 km), 密度のちがい (コロナ ~ $10^{-16} \text{ g cm}^{-3}$ 光球 ~ $10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$) 及び $\beta = \frac{P}{B^2/8\pi}$ のちがい (コロナ ~ 0.03, 光球 ~ 1) によつて生じる。コロナでは重力の影響よりも, 磁場の変化がより直接に反映され, 光球では, 磁場の変化だけでなく, 重力, 物質の運動などが相互にからみあつた状況が現われる。この光球における磁場の役割あるいは, $\frac{P}{B^2/8\pi} > 1$ のもつ意味を理解するには, §7.2 でやつたのと同じように, 磁力線の真空膨張速度とシミュレーションの結果を比較してやればよい。すなわち, (7.8) に光球シミュレーションモデルのパラメータ (§6.2) $x_m = 1500 \text{ km}$, $\alpha = 1.0 \text{ s}^{-1}$ を代入すると

$$v \sim 1000 \text{ km s}^{-1}$$

となるが, シミュレーションの結果は 5 km s^{-1} である。従て $\frac{P}{B^2/8\pi} \gtrsim 1$ (これは $B \lesssim 1000 \text{ G}$) であるような光球上での磁力線の運動は真空膨張とは全く異なる。

7.4 Deviation from Current Free (or Force Free) Field

§1で述べたように、この論文の主目的の一つに観測された速度場から磁場の構造、特に Force Free からのずれを推定する方法の探求がある。これに廻りに満足すべき解答が得られているわけではないか、磁束チューブの上昇運動のシミュレーションから suggest された点について述べることにする。

まず、磁束チューブが上昇するときに生ずる電流分布は図 6.7 ~ 6.8 (コロナ) 図 6.18 (光球) のようになり。電流密度は最大 $6 \times 10^{-5} \text{ Am}^{-2}$ (コロナ), 2 Am^{-2} (光球) となっている。コロナと光球における電流の大きさのちがいは、主として磁場の大きさのちがい ($j \propto B^2$)、増大率のちがい、 \propto よよ。これらから $\frac{1}{2}$ ことは、当たり前のことであるが、磁力線に垂直な方向に速度場があると、電流分布が生じるとのことであり、定量的には、コロナで $B = 10 \text{ G}$, $(\frac{dB}{dt} = 0.17 \text{ Gs}^{-1})$ $v \sim 40 \text{ km s}^{-1}$ のとき $j \sim 10^{-5} \text{ Am}^{-2}$ 、光球で $B = 1000 \text{ G}$, $(\frac{dB}{dt} = 100 \text{ Gs}^{-1})$ $v \sim 5 \text{ km s}^{-1}$ のとき $j \sim 1 \text{ Am}^{-2}$ ということになる。

このことから逆に観測された速度場から磁力線に垂直な電流分布 (Force Free からのずれ) を推定できる。例えば、コロナの Soft X-ray の構造から水平磁場と考へて $\frac{1}{2}$ 所で 40 km s^{-1} の上昇速度があるとする。磁場の強さは未知であるが、光球磁場からの推定で約 10 G であれば、我々の結果より 10^{-5} Am^{-2} の電流が予想される。

7.5 Summary and Conclusion

結論をまとめると、次のようになる。

- (1) 開発したMHDコードは Nakagawa et al. (1976) の結果を完全には再現しない。
- (2) コロナ中の磁束チューブの上昇速度は、 $\frac{P}{B^2/8\pi} \ll 1$ のとき、ほぼ「真空膨張速度」である。
- (3) 光球中の磁束チューブの上昇速度は、 $\frac{P}{B^2/8\pi} \gtrsim 1$ のとき、真空膨張速度とかなり異なる。
- (4) Kawaguchi and Kitai (1976) の観測を 2 次元の Lax-Wendroff 法でシミュレーションするのは極めて困難である。
- (5) 磁束チューブの上昇にともない、コロナ ($B=10\text{G}$) では $v \sim 40\text{km s}^{-1}$ と 10^{-5}Am^{-2} 、光球 ($B=10^3\text{G}$) では $v \sim 5\text{km s}^{-1}$ と 1Am^{-2} の電流が生じる。

残された大きな問題点は次の3点である。

- (1) 2 次元混合初期値境界値問題における境界条件の決定法の解決。
- (2) Kawaguchi and Kitai (1976) の観測をシミュレートするための 実用的 MHD コードの開発および観測の説明。
- (3) AFS のシミュレーション

最後に最初の 3 つの目的がどの程度達成されたかについて簡単に述べる。

- オ1の目的： Empirical Model としては §2.3.4。シミュレーションは未解決
- オ2の目的： ほとんど未解決 (§7.4)
- オ3の目的： 残された問題点 (1), (2) や、結論 (1) などがあるため、目的は十分に達成されたとはいえない。

Acknowledgement

はじめに、この論文のテーマを下さり、終始 暖かく励まして下さった
川口教授に厚く御礼申しあげます。また、いつも快よく相談や質問
に応じて下さった 稲垣博士、北井礼三郎氏、伊藤裕氏、加藤教授、
東京大学 梅井隆博士 には深く感謝いたします。

Appendix A. Examples of Compatibility Relations

A.1. 2次元流体 (ρ, u, v, p)

$$\text{Basic eq.} \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \delta p \frac{\partial u}{\partial x} + \delta p \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$A = \begin{bmatrix} u & p & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \delta p & 0 & u \end{bmatrix} \quad (\text{A.5}) \quad B = \begin{bmatrix} v & 0 & p & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \delta p & v \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$w = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

characteristic condition

$$\begin{aligned} & \det(I\varphi_t + A\varphi_x + B\varphi_y) \\ &= V^2 (V^2 - V_s^2 (\nabla \varphi)^2) \quad (\text{A.8}) \\ &= 0 \\ & \quad t=t=L, \quad V \equiv \varphi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \end{aligned}$$

characteristic velocity ($\lambda = -\frac{\varphi_t}{|\nabla \varphi|}$)

$$\lambda_{1,2} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (A.9)$$

$$\lambda_{3,4} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \pm v_s \quad (A.10)$$

left nullvector

$$\mathbf{Q}_1 = [v_s^2, 0, 0, -1] \quad (A.11)$$

$$\mathbf{Q}_2 = [0, n_y, -n_x, 0] \quad (A.12)$$

$$\mathbf{Q}_{3,4} = [0, \pm n_x, \pm n_y, \pm v_s] \quad (A.13)$$

compatibility relation

1) 流線

$$(i) \quad v_s^2 \frac{Dp}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = 0 \quad (A.14)$$

(エントロピー保存)

$$(ii) \quad \lambda \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \lambda \cdot \nabla p = 0 \quad (A.15)$$

(循環保存)

$$\text{ただし}, \quad \lambda = (n_y, -n_x)$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

2) 音波

$$\left(\ln \frac{D}{Dt} \pm v_s \nabla \right) \cdot \mathbf{u} \pm \frac{v_s}{\rho p} \left(\frac{D}{Dt} \pm v_s \ln \nabla \right) p = 0 \quad (A.16)$$

(もしはヤリマンの不変量は存在しない)

A.2. 3次元 isentropic MHD ($\rho, u, v, w, B_x, B_y, B_z$)

Basic eq. (3.1)~(3.4) τ" Φ=0, energy eq. (3.3) はなし,
 $\mathbf{v}=(u, v, w)$, $\mathbf{B}=(B_x, B_y, B_z)$ とすればよい。

characteristic condition

$$\nabla(V^2 - (\mathbf{v}_A \cdot \nabla \Phi)^2)(V^4 - (v_s^2 + v_A^2)V^2 |\nabla \Phi|^2 + v_s^2 (\mathbf{v}_A \cdot \nabla \Phi)^2) = 0 \quad (A.17)$$

$t=t_0$, $V \equiv \Phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi$

characteristic velocity

i) 流線 $\lambda_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ (A.18)

ii) Alfvén mode $\lambda_{2,3} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \pm \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n}$ (A.19)

iii) fast mode $\lambda_{4,5} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \pm C_f$ (A.20)

iv) slow mode $\lambda_{6,7} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \pm C_s$ (A.21)

left nullvector

i) 流線 $\mathbf{Q}_1 = [0, 0, 0, 0, n_x, n_y, n_z]$ (A.22)

ii) Alfvén mode $\mathbf{Q}_{2,3} = [\mathbf{l}_1, \mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B]$ (A.23)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l}_1 = (\mathbf{e}_B \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \\ \mathbf{Q}_A = -\frac{1}{\rho} [\mathbf{v}_s^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{e}_B - \mathbf{B} \mathbf{C}^2 \mathbf{e}_A] \end{array} \right. \quad (A.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_B = -\frac{1}{\rho C} [\mathbf{v}_s^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})^2 - \mathbf{C}^2 \mathbf{B}^2] \mathbf{e}_B \end{array} \right. \quad (A.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l}_1 = (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n}) \mathbf{C} \\ \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{B} = 0 \quad |\mathbf{e}_A| = 1 \\ \mathbf{Q}_B \cdot \mathbf{n} = 0 \quad |\mathbf{e}_B| = 1 \end{array} \right. \quad (A.26)$$

$t=t_0$ $\mathbf{C} = (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n})$

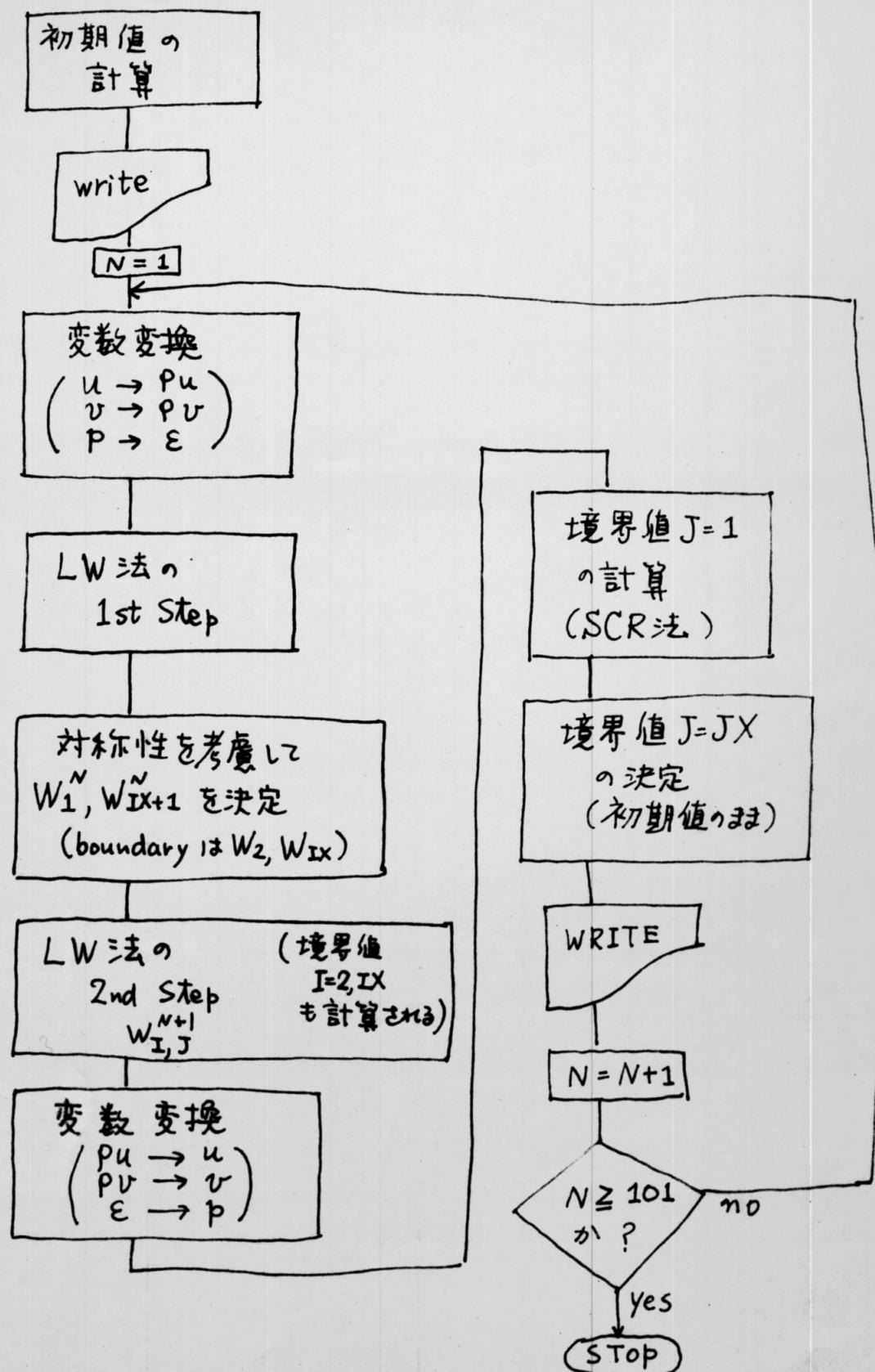
$\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{B} = 0 \quad |\mathbf{e}_A| = 1$

$\mathbf{e}_B \cdot \mathbf{n} = 0 \quad |\mathbf{e}_B| = 1$

iii) fast mode (i) $\tau'' C = C_f$

iv) slow mode (ii) $\tau'' C = C_s$

Appendix B. MHD コードのフローチャート



REFERENCES

- Allen,C.W.: 1973, Astrophysical Quantities, 3rd ed., Univ. of London, The Athlone Press
- Born,N.: 1974, Solar Phys. 38, 127
- Bray,R.J. and Loughhead,R.E.: 1964, Sunspots, Chapman and Hall, p67,p250
- Bruzek,A.: 1967, Solar Phys. 2, 451
- Bruzek,A.: 1969, Solar Phys. 8, 29
- Courant,R. and Hilbert,D.: 1962, Method of Mathematical Physics, Vol.2. Interscience, New York, London
- Frazier,E.N.: 1972, Solar Phys. 26, 130
- Gabriel,A.H.: 1976, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A281, 339
- Gingerich,O., Noyes,R.W., Kalkofen,W. and Cuny,Y.: 1971, Solar Phys. 18, 347
- Harvey,K.L. and Martin,S.F.: 1973, Solar Phys. 32, 389
- Hildner,E.: 1974, Solar Phys. 35, 123
- Jeffrey,A. and Taniuti,T.: 1964, Nonlinear Wave Propagation, Academic Press, New York
- 川口市郎, 1978, 第71卷, 天文月報, 8月号**
- Kawaguchi,I. and Kitai,R.: 1976, Solar Phys. 46, 125
- Kawaguchi,I. and Kitai,R.: 1977, Unpublished
- Korobova,Z.B., Tchandaev,A.K. and Vassilyeva,G.Y.: 1968 Kiepenheur (ed.), Structure and Evolution of Solar Active Regions, IAU Symp. No.35, 151
- Martres,M.J. and Bruzek,A. and Durrant,C.J. (eds.), Illustrated Glossary for Solar and Solar Terrestrial Physics, Dordrecht, Reidel
- Nakagawa,Y., Wu,S.T. and Han,S.M.: 1973, Solar Phys. 30, 111
- Nakagawa,Y., Wu,S.T. and Tandberg-Hanssen,E.: 1975, Solar Phys. 41, 387
- Nakagawa,Y., Steinolfson,R.S. Wu,S.T.: 1976, Solar Phys. 47, 193
- 西川 宝, 1978, 修士論文**
- Parker,E.N.: 1977, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 15, 45
- Richtmyer,R.D. and Morton,K.W.: 1967, Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience, New York
- Roche,P.J.: 1972, Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque
- Rubin,E.L. and Burstein,S.Z.: 1967, J. Comp. Phys. 2, 178
- Rust,D.M.: Solar Phys. 33, 205
- Sakurai,T.: 1977, Ph.D.Thesis

- Smith, Jr.J.B., Speich,D.M., Wilson,R.M., Tandberg-Hanssen,E.
and Wu,S.T.: 1977, Solar Phys. 52, 379
Spiegel,E.A.: 1957, Astrophys. J., 126, 202
Steinolfson,R.S., Wu,S.T., Dryer,M. and Tandberg-Hanssen,E.
1978, Astrophys. J., 225, 259
Stix,M.: 1970, Astron. Astrophys., 4, 189
谷内,西原.: 1977, 非線型波動, 岩波書店
Weber,W.: 1978, Ph.D.Thesis
Wolfson,C.J. Acton,L.W., Leibacher,J.W. and Roathig,D.T.:
1977, 55, 181
Solar Phys.

修士論文の
ミスフリ 訂正

p16 下から10行目 $0.5 \text{ km s}^{-1} \rightarrow 0.5 \text{ km s}^{-1}$ 以下

p29 " 5 " (4.31) \rightarrow (4.32)

p39 式に (4.65) が抜けている

p54 下から4行目 $i=M \rightarrow j=M$

p58 図6.13 \rightarrow 6.12 (上から2行目)

図6.14 \rightarrow 6.13 (" 3 ")

p80 上から6行目 信頼 \rightarrow 信頼性

p91 (A.15) $\nabla p \rightarrow \nabla b$

p34 (4.44)
 $-\frac{1}{\rho} \rightarrow +\frac{1}{\rho}$

p92 (A.17) $v_s^2 (\nabla A \cdot \nabla \psi)^2 \rightarrow v_s^2 |\nabla \psi|^2 (\nabla A \cdot \nabla \psi)^2$

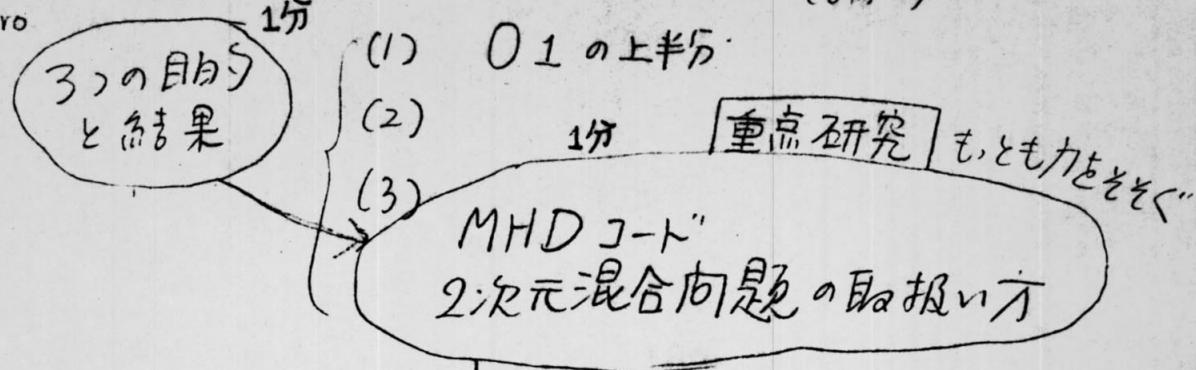
79ページは、はじめがない。

1992/2/22

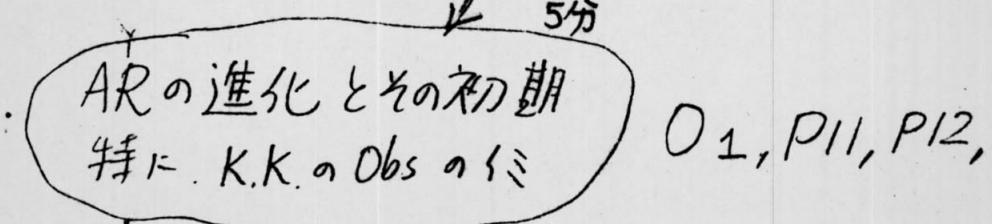
修論発表会予稿

O: オールヘッドプロジェクター
P: プリントのページ
(論文)

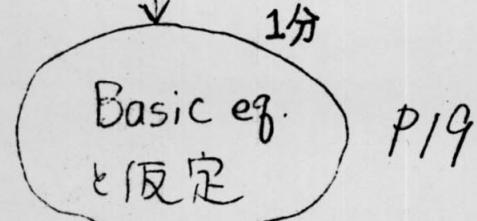
§1. Intro



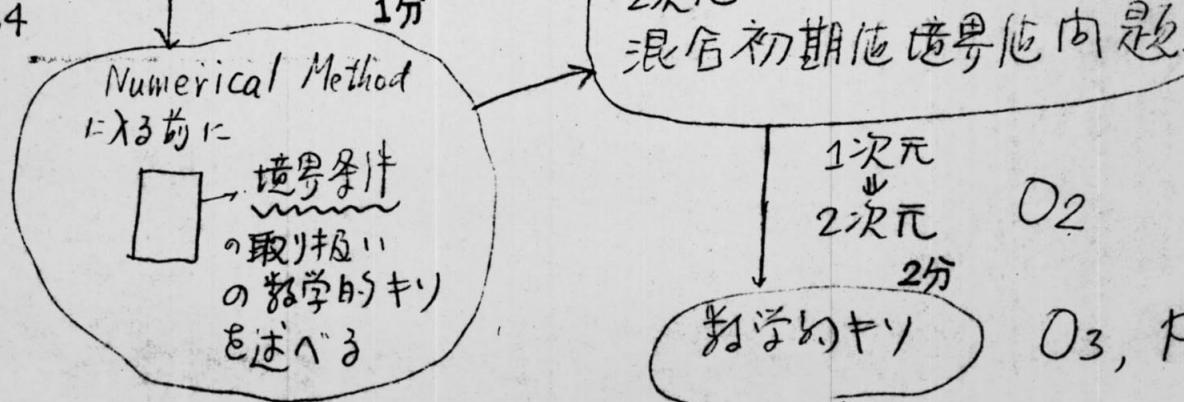
§2.



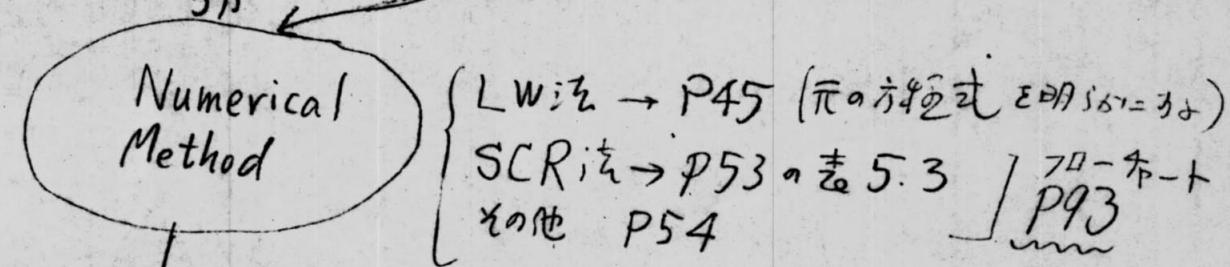
§3



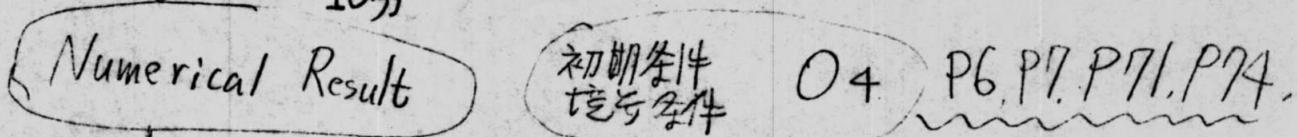
§4



§5



§6



§7

