基礎宇宙物理学 II ：電磁流体力学　 レポート 5

この授業に関するページ：http://www.kwasan.kyoto-u.ac.jp/˜tamazawa/lecture/astrophysics2.html

1. MHD 方程式のうち、Maxwell 方程式に関するものは次の 4 つである。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e \tag{1}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4}$$

式 3、4 の divergence をとることにより、式 1、2 は初期に条件を満たせば不要である（制限方程式である）ことを示せ。必要であれば電荷保存の式を使え。

2. 　熱力学第一法則 5、およびジュール加熱の式 6 から、ジュール加熱を考慮したエネルギーの式 7 を導け。

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dU}{dt} + p\frac{dV}{dt} \tag{5}$$
$$\rho\frac{dQ}{dt} = \eta j^2 \tag{6}$$
$$\frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1}\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = \eta j^2 \tag{7}$$

ここで、U、V はそれぞれ単位質量あたりの内部エネルギー 8 及び体積 9 である。式 7 は単位体積、単位時間あたりのエネルギー変化であり、、式 5 は単位質量、単位時間あたりのエネルギー変化であることに注意。

$$U = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \tag{8}$$
$$V = \frac{1}{\rho} \tag{9}$$

3. 　Navier-Stokes 方程式は非圧縮（$\rho = const$）および $\nu = const$ のとき、

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{10}$$

である。。このとき、渦度（vorticity）$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}$ は

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + \nu\nabla^2\Omega \tag{11}$$

となることを示せ。これより、Helmholtz の渦定理（Helmholtz's vortex theorem）12 が導出される。Alfvén の凍結定理（Alfvén's frozen theorem）13 および誘導方程式 (induction equation)14 との類似性がある。

$$\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{S} = 0 \tag{12}$$
$$\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} = 0 \tag{13}$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{dt} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \eta_D\nabla^2\boldsymbol{B} \tag{14}$$