

基礎宇宙物理学 II : 電磁流体力学 レポート 7

この授業に関するページ : <http://www.kwasan.kyoto-u.ac.jp/~tamazawa/lecture/astrophysics2.html>

1. 電磁流体波 (MHD wave) の分散関係式 (dispersion relation) は式 1 で表される。このとき、位相速度 (phase velocity)、群速度 (group velocity) ダイアグラムを確認せよ。ただし、 θ は磁場 B と波数ベクトル k のなす角、 $B = (0, 0, B)$ とし、 xz 平面内で考えるものとする。位相速度、群速度はそれぞれ式 2、3 で定義される。

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2} \left[(c_s^2 + v_A^2) \pm ((c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \right] \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_{phase} = \frac{\omega}{k} \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_k = \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_{group} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right) \quad (3)$$

補足 : まず、ダイアグラム (diagram) とは図のことを指し、この問題の場合、位相速度ベクトル、群速度ベクトルのそれぞれが角度 θ を変化させた時にとりうる値の集合を 2 次元平面に図示したものである (この図はフリードリックスダイアグラム (Friedricks diagram) とも呼ばれる)。また、この図から波の伝播特性もわかる。

位相速度 : 問題に書かれている位相速度ベクトルの表記 (式 2) と分散関係式、そして問題文中にある波数ベクトル k の定義を用いると、位相速度ベクトルのダイアグラムの図が書ける。

群速度 : 問題に書かれている群速度ベクトルの表記 (式 3) を極座標で表すと、

$$\mathbf{v}_{group} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \mathbf{i}_k \frac{\partial \omega}{\partial k} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \quad (4)$$

となるので、これを計算すれば群速度ベクトルが求まりダイアグラムを書くことが出来る。実際に図にする場合にはグラフ描画ソフト (例えば gnuplot など) を用いてコンピュータで作成するのが良いだろう。参考書籍は、例えば「シリーズ現代の天文学 12 天体物理学の基礎 II」(日本評論社、2.2 節) が挙げられる。