基礎宇宙物理学 II ：電磁流体力学　レポート８

この授業に関するページ：http://www.kwasan.kyoto-u.ac.jp/˜tamazawa/lecture/astrophysics2.html

1. 　レポート５ではジュール加熱の式をあらかじめ与えてエネルギーの式を考えた。ここでは MHD 方程式のなかのエネルギー方程式について、もう少し細かく考えることにする。
内部エネルギーについては、より一般的に、流体要素の正味エネルギーの吸い込み・湧きだしの量をあらわす energy loss function $\mathcal{L}$ をもちいて、
$$\rho\frac{dQ}{dt} \equiv -\mathcal{L} \tag{1}$$
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dU}{dt} + p\frac{dV}{dt} \tag{2}$$
となる。これらと連続の式を用いて、以下の式を示せ。
$$\rho\frac{dU}{dt} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} - \mathcal{L} = -p\nabla\cdot\boldsymbol{v} - \mathcal{L} \tag{3}$$

2. 　次に運動エネルギーを考える。オームの法則 4
$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} + \eta\boldsymbol{J} \tag{4}$$
と $\boldsymbol{j}$ との内積をとることにより、以下の式を示せ。
$$\boldsymbol{v}\cdot\left(\boldsymbol{j}\times\frac{\boldsymbol{B}}{c}\right) = -\eta j^2 + \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} \tag{5}$$

3. 前問で導出した式 3、式 5 及び MHD の運動方程式の両辺を $\boldsymbol{v}$ との内積をとった式 6 を考えることで、式 7 を示せ。
$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\boldsymbol{v}\cdot\nabla p + \boldsymbol{v}\cdot\left(\boldsymbol{j}\times\frac{\boldsymbol{B}}{c}\right) \tag{6}$$
$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\right) = -\nabla\cdot(p\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} - \eta j^2 - \mathcal{L} \tag{7}$$

4. 電磁場のエネルギーの出入りを知るため、Poynting vector
$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{8}$$
の divergence を考える。この時、以下の式になることを示せ。
$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \nabla\cdot\boldsymbol{S} \tag{9}$$

5. 以上の議論より、MHD における保存系のエネルギー方程式が以下のように書かれることを示せ。
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{8\pi}B^2\right] + \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\right)\rho\boldsymbol{v} + \boldsymbol{S}\right] = -\left(\mathcal{L} + \eta j^2\right) \tag{10}$$